Universidad Nacional de Chimborazo
NOVASINERGIA, 2018, Vol. 1, No. 1, diciembre-mayo, (6-13)
ISSN: 2631-2654
https://doi.org/10.37135/unach.ns.001.01.01
Artículo de Investigación

Traslaciones de Transformaciones Tipo *Boole* Robustamente Transitivas
Robustly Transitive Translations of Boole-like transformations

Bladismir Leal *, Guelvis Mata, David Ramírez
Departamento de Matemáticas, Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela, 5101; gmata@ula.ve; rdavid@ula.ve
* Correspondencia:bladismir@ula.ve

Recibido 14 mayo 2018; Aceptado 10 junio 2018; Publicado 12 junio 2018

Resumen: El estudio de la famosa transformación de Boole y sus diferentes parametrizaciones se ha hecho desde el contexto de la teoría ergódica para medidas infinitas. Se sabe muy poco sobre el estudio de estas transformaciones desde la perspectiva de sistemas dinámicos topológicos (puntos periódicos, conjuntos invariantes, transitividad, conjunto no-errante, etc.), y mucho menos se sabe sobre la estabilidad de los fenómenos dinámicos que se encuentran en este tipo de transformaciones. En este trabajo consideramos un modelo geométrico de la transformación de *Boole* y mostramos que es transitiva, es decir, posee una órbita densa en $\mathbb{R}$. También, probamos que un tipo de traslación (un tipo de parametrización) del modelo geométrico de la transformación de Boole posee un conjunto de Cantor invariante transitivo, cuyas órbitas periódicas son densas en tal conjunto. Para ello, usamos el método clásico para obtener conjuntos de Cantor dinámicamente definidos. Finalmente, adaptando métodos para transformaciones no acotadas con una discontinuidad, mostramos que, si B es una transformación tipo Boole, entonces para cada $\varepsilon > 0$ la traslación B_ε es robustamente transitiva.

Palabras clave: Órbitas Periódicas, Robustamente Transitivo, Transitividad, Transformación de Boole, Traslaciones.

Abstract: *The study of the renowned Boole transformation and its different parametrizations have been made from the context of the ergodic theory for infinite measurements. Very little is known about the study of these transformations from the perspective of topological dynamic systems (periodic points, invariant sets, transitivity, non-errant set, etc.), and much less is known about the stability of the dynamic phenomena found in this type of transformation. In this work we show a geometric model of Boole transformation, which results to be transitive, that is, it has a dense orbit in $\mathbb{R}$. Also, we show that a type of translation (one type of parameterization) of the geometric model of the Boole transformation has a transitive invariant Cantor set, whose periodic orbits are dense in such a set. For this, we use the classical method to obtain dynamically defined Cantor sets. Finally, adapting methods for unbounded transformations with a discontinuity, we proved that, if B is a Boole transformation, then for each $\varepsilon > 0$ the translation B_ε is robustly transitive.*

Keywords: *Periodic Orbits, Robustly Transitive, Transitivity, Boole Transformation, Translations.*

1 Introducción

La historia de la transformación de Boole comienza en 1857, cuando George Boole prueba que la función $B : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $B(x) = x - \frac{1}{x}$ preserva la medida de Lebesgue y descubre la sorprendente fórmula:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - \frac{1}{x})\,\mathrm{d}x \tag{1}$$

es verdadera para cualquier función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ Riemann integrable (Boole, 1857). Tal función hoy en día es conocida como transformación de Boole. Más tarde, Adler y Weiss (1973), demuestran que, B es ergódica respecto a la medida de Lebesgue. Es este un hecho interesante, debido a que existen diferencias fundamentales entre espacios de medida infinita y espacios de medida finita. Después de lo cual, varios autores han trabajado en las propiedades ergódicas de parametrizaciones de B, algún tipo de generalización y en transformaciones que preservan medidas infinitas (Aaronson, 2007, 1983; Neuwirth, 1978; Prykarpatsky y Feldman, 2006). Hasta aquí el estudio de esas aplicaciones, ha sido de tipo ergódico y no sobre las propiedades de dinámica topológica como el conjunto de puntos periódicos y transitividad, este último importante en el concepto de caos dinámico; aunque recientemente en Muñoz (2015) se presentan condiciones para las que, una clase de familias con propiedades parecidas a la transformación de Boole, sea transitiva.

En Prykarpatsky y Feldman (2006) se estudia la ergodicidad de familias parametrizadas de la transformación B, una de esas es de la forma $B_{a\varepsilon}(x) = x - \frac{a}{x} + \varepsilon$, para $a > 0$ y $\varepsilon > 0$. También se demuestra que preserva una medida infinta, pero no es ergódica respecto a esa medida. Lo anterior no significa que está todo perdido. Aquí consideramos un modelo geométrico de la transformación de Boole y probaremos algunas propiedades dinámicas para un tipo de traslación o parametrización de dicho modelo geométrico que posee las principales propiedades de la transformación de Boole, que llamaremos tipo Boole, como se puede apreciar en la siguiente definición:

Definición 1.1. Una transformción $B : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 es tipo Boole si

a) $B'(x) > 1$ para todo x;

b) $\lim_{x\to 0^+} B(x) = -\infty$ y $\lim_{x\to 0^-} B(x) = +\infty$;

c) $B(x) \neq x$ para todo x;

d) $\lim_{x\to +\infty} (B(x) - x) = 0$ y $\lim_{x\to -\infty} (B(x) - x) = 0$

La traslación (o parametrización) de B de la que se ha venido mencionando, viene dada por la forma mostrada en 2, en donde para cada $\varepsilon \in \mathbb{R}$, se define

$$B_\varepsilon(x) := \begin{cases} B(x) + \varepsilon, & \text{si} \quad x > 0 \\ B(x) - \varepsilon, & \text{si} \quad x < 0 \end{cases} \tag{2}$$

De aqui en adelante esta transformación será referida como FTB.

En concreto se prueba lo siguiente:

Teorema 1.2. *Si B es una transformación tipo Boole entonces, para cada $\varepsilon > 0$, existe un conjunto cantor Λ_ε invariante respecto a la transformación B_ε, tal que $B_\varepsilon|_{\Lambda_\varepsilon}$ es transitiva y su conjunto de puntos periódicos es denso en Λ_ε. Además, si $x \in \Lambda_\varepsilon^c$ se tiene que, $|B^n(x)| \to +\infty$ cuando $n \to +\infty$.*

En el estudio de los fenómenos dinámicos, es muy interesante saber si ellos son persistentes bajo perturbaciones, una forma de persistencia significa que al perturbar, el nuevo sistema obtenga algunas caracteristicas del sistema original, como por ejemplo propiedades dinámicas (los mismos puntos periódicos, transitividad). Dado el siguiente conjunto:

$$\mathbb{F}_i := \{f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \mapsto \mathbb{R} : f \text{ es de clase } C^i\}, \tag{3}$$

para $i = 0, 1, 2$.

Diremos que $g \in \mathbb{F}_0$ es $\delta - C^0$ próximo de B_ε si $|g(x) - B_\varepsilon(x)| < \delta$ para todo $x \neq 0$. También, diremos que $g \in \mathbb{F}_1$ es $\delta - C^1$ próximo de B_ε si g es $\delta - C^0$ próximo de B_ε y $|g'(x) - B'_\varepsilon(x)| < \delta$ para todo $x \neq 0$. Sea $f \in \mathbb{F}_1$ tal que f posee un conjunto de cantor Λ_f invariante y transitivo. Diremos que f es robustamente transitivo si existe $\delta > 0$ tal que si $g \in \mathbb{F}_1$ es $\delta - C^1$ próximo de f, g posee un conjunto de cantor Λ_g invariante transitivo y $g|_{\Lambda_g}$ es topológicamente conjugado a $f|_{\Lambda_f}$, lo último significa que existe un homeomorfismo $h : \Lambda_g \longrightarrow \Lambda_f$ tal que $f \circ h(x) = h \circ g(x)$ para todo $x \in \Lambda_g$.

Teorema Principal 1. Sea B una transformación tipo Boole. Para cada $\varepsilon > 0$, la transformación B_ε es robustamente transitiva.

2 Metodología

En la revisión bibliográfica se pudo constatar que existe muy poco avance en el estudio de la dinámica topológica, como lo son puntos periódicos, transitividad, robustez transitiva, etc., en las parametrizaciones de la transformación de Boole. Aunque, sí encontramos que existen estudios desde el punto de vista de la teoría ergódica.

En la familia de traslaciones de la transformación tipo Boole, usamos el método tradicional para la construcción de conjuntos de Cantor, estos métodos se pueden encontrar desarrollados en Devaney (1989) y Robinson (1999). Adaptamos esos métodos, con cierto cuidado ya que las transformaciones tipo Boole poseen una asíntota vertical, para mostrar que Λ_{B_ε} es un conjunto de Cantor invariante para todo $\varepsilon > 0$. Para probar que Λ_{B_ε} es transitiva respecto a B_ε para todo $\varepsilon > 0$, usamos un método bastante tradicional en sistemas dinámicos que propone conseguir una conjugación topológica (ver parte final de la introducción para su definición) entre $B|_{\Lambda_{B_\varepsilon}}$ y el shift unilateral σ (ver inicio de la demostración del Teorema 1.2 para su definición).

Para considerar el modelo geométrico de la transformación de Boole, lo que hicimos fue considerar su diferenciabilidad, por lo menos exigir que sea de clase C^1, su derivada mayor que 1 para todos los puntos del dominio, considerar sus dos asíntotas, la vertical en $x = 0$ y la asíntota oblicua en $y = x$ y finalmente pedirle que no tenga puntos fijos, ver definición 1.1.

Para obtener el Teorema principal, el método usado fue descifrar lo hecho en Robinson (1999) para la función logística y lo hecho en Muñoz (2015), para transformaciones no acotadas con una discontinuidad, adaptarlo a nuestro caso, de manera que las perturbaciones δ-C^1 próximas a B_ε obtuvieran puntos fijos hipebólicos, es decir, puntos fijos con derivada estrictamete mayor que 1, además las perturbaciones se realizan dentro del espacio de las transformaciones C^1 con una discontinuidad en $x = 0$.

3 Resultados y Discusión

Comenzaremos con algunos resultados preliminares y notación básica necesaria para alcanzar nuestro objetivo.

3.1 Preliminares

Considere la traslación de una transformación tipo Boole B,

$$B_\varepsilon(x) := \begin{cases} B(x) + \varepsilon, & \text{si} \quad x > 0 \\ \\ B(x) - \varepsilon, & \text{si} \quad x < 0 \end{cases} \tag{4}$$

observe que las restricciones sobre cada componente conexa es un difeomorfismo de clase C^1 sobre $\mathbb{R}$, es decir, $B_{-\varepsilon}|_{(-\infty,0)} : (-\infty, 0) \mapsto \mathbb{R}$ y $B_{+\varepsilon}|_{(0,+\infty)} : (0, +\infty) \mapsto \mathbb{R}$, son difeomorfismos crecientes de clase C^1. La siguiente observación de funciones derivables será de utilidad en este trabajo.

Observación 3.1. Sea J un intervalo y $f : J \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ derivable tal que $f'(x) > 1$, para todo $x \in J$. Si existe $x_0 \in int(J)$ y $f(x_0) = x_0$, entonces

a) $f(x) > x, \forall\, x > x_0$, con $x \in J$;

b) $f(x) < x, \forall\, x < x_0$, con $x \in J$

Puntos fijos
Por la observación 3.1, B_ε posee sólo dos puntos fijos, uno $x_0 \in (-\infty, 0)$ y el otro $x_1 \in (0, +\infty)$. Ahora, existe $x_{01} \in (x_0, 0)$ tal que $B_{-\varepsilon}(x_1) = x_{01}$ y existe $x_{01} \in (0, x_1))$ tal que $B_{+\varepsilon}(x_0) = x_{01}$. Denotado por $I_0 = [x_0, x_{01}] \subset (-\infty, 0)$, $I_1 = [x_{10}, x_1] \subset (0, +\infty)$ y $I = [x_0, x_1]$.

Observación 3.2. Ya que $B'(x) > 1$ para todo $x \neq 0$, se tiene que $B_{-\varepsilon}|_{I_0} : I_0 \longmapsto I$ y $B_{+\varepsilon}|_{I_1} : I_1 \longmapsto I$ son homeomorfismos.

Notación 3.3. los puntos x_{01} y x_{10} poseen sus respectivas preimagenes en la siguiente iteración, denotaremos por x_{110} a la preimagen positiva de x_{10} y x_{010} a la preimagen negativa de x_{10}, esto es, $B^{-1}_{+\varepsilon}(x_{10}) = x_{110}$ y $B^{-1}_{-\varepsilon}(x_{10}) = x_{010}$, por lo tanto $B^{-1}_{\varepsilon}(x_{10}) = \{x_{110}, x_{010}\}$.
Similarmente; denotaremos por x_{101} a la preimagen positiva de x_{01} y x_{001} a la preimagen negativa de x_{01}, esto es $B^{-1}_{+\varepsilon}(x_{01}) = x_{101}$ y $B^{-1}_{-\varepsilon}(x_{01}) = x_{001}$, así $B^{-1}_{\varepsilon}(x_{01}) = \{x_{001}, x_{101}\}$, por lo que:

$$B^{-2}_{\varepsilon}(x_0) = \{x_0, x_{10}, x_{010}, x_{110}\}, \tag{5a}$$
$$B^{-2}_{\varepsilon}(x_1) = \{x_1, x_{01}, x_{101}, x_{001}\} \tag{5b}$$

Siguiendo la notación, en general dado un punto eventualmente fijo $x_{i_1\ldots i_k}$, la referencia i_0 correspondiente a su preimagen negativa será $i_0 = 0$ y para la correspondiente preimagen positiva será $i_0 = 1$, es decir, $B^{-1}_{-\varepsilon}(x_{i_1\ldots i_k}) = x_{0i_1\ldots i_k}$ y $B^{-1}_{+\varepsilon}(x_{i_1\ldots i_k}) = x_{1i_1\ldots i_k}$ donde $i_j = 0 : 1$ para $j = 1 : k$.

Proposición 3.4. *Si $A = [x_0, x_1]^c = I^c$, entonces $B_\varepsilon(A) \subset A$ y para cada $x \in A$ se tiene que, $|B^n_\varepsilon(x)| \to +\infty$, cuando $n \to +\infty$.*

Proof. La primera parte se basa en la observación 3.1.
Para la segunda parte, sea $x \in (x_1, +\infty)$, del hecho que $B'_{+\varepsilon}(x) > 1$, para todo $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ y de la observación 3.1 se concluye que $B_{+\varepsilon}(x) > x$. Luego, iterando x respecto a $B_{+\varepsilon}$ se sigue que, $B_{+\varepsilon}(x) < B^2_{+\varepsilon}(x)$ e iterando sucesivamente se tiene que $B^n_{+\varepsilon}(x) < B^{n+1}_{+\varepsilon}(x)$, para todo $n > 0$, es decir, $\{B^n_{+\varepsilon}(x)\}^{+\infty}_{n=1}$ es una sucesión monótona creciente. Ya que $B_{+\varepsilon}$ tiene un único punto fijo en $(0, +\infty)$, que es x_0. Entonces, $B^n_{+\varepsilon}(x) \to +\infty$, cuando $n \to +\infty$. El caso $x \in (-\infty, x_0)$ es completamente análogo. □

Sea,

$$\Lambda_\varepsilon = \bigcap_{n\geq 0} B_\varepsilon^{-n}(I) = \bigcap_{n\geq 1} B_\varepsilon^{-n}(I_0 \cup I_1). \tag{6}$$

Proposición 3.5. *Si $\varepsilon > 0$. Si $x \in \Lambda^c_\varepsilon \backslash (\cup_{n\geq 0} B_\varepsilon^{-n}(0))$, entonces $|B^n_\varepsilon(x)| \to +\infty$, cuando $n \to +\infty$.*

Proof. Sea $x \in \Lambda^c_\varepsilon \backslash (\cup_{n\geq 0} B_\varepsilon^{-n}(0))$, entonces existe un $j \in \mathbb{N}$ tal que $B^j_\varepsilon(x) \in A$, aplicando la proposición 3.4 se sigue facilmente la prueba. □

De la proposición 3.4, la observación 3.2 y la proposición 3.5, la dinámica interesante de la transformación B_ε está contenida en el intervalo $I = [x_0, x_1]$.

Notación 3.6. Recordemos que
$x_0 < x_{001} < x_{010} < x_{01} < 0$ y $x_{10} < x_{101} < x_{110} < x_1$, ahora bien denotemos por $I_{00} = [x_0, x_{001}]$, $I_{01} = [x_{010}, x_{01}]$, $I_{10} = [x_{10}, x_{101}]$ y $I_{11} = [x_{110}, x_1]$, tales intervalos $I_{i_0 i_1}$ son aplicados difeomorficamente sobre I_{i_1}. En consecuencia, $B_\varepsilon^{-1}(I_0) = I_{00} \cup I_{10}$ y $B_\varepsilon^{-1}(I_1) = I_{01} \cup I_{11}$, posteriormente $B_\varepsilon^{-2}(I) = I_{00} \cup I_{01} \cup I_{10} \cup I_{11}$, es la unión disjunta de 2^2 intervalos compactos. Por otro lado observe que $I_{i_0} \cap B_\varepsilon^{-1}(I_{i_1}) = I_{i_0 i_1}$ con $i_0, i_1 \in \{0,1\}$, luego como $B_\varepsilon(I_{i_0}) = I$, entonces $B_\varepsilon(I_{i_0 i_1}) = B_\varepsilon(I_{i_0} \cap B_\varepsilon^{-1}(I_{i_1})) = B_\varepsilon(I_{i_0}) \cap I_{i_1} = I_{i_1}$ y en general:

$$I_{i_0 \ldots i_n} = I_{i_0} \cap B_\varepsilon^{-1}(I_{i_1}) \cap \ldots \cap B_\varepsilon^{-n}(I_{i_n}) \tag{7a}$$

$$= I_{i_0} \cap B_\varepsilon^{-1}(I_{i_1 \ldots i_n}). \tag{7b}$$

Para mostrar que Λ_ε es un conjunto de cantor, seguiremos de cerca las ideas desarrolladas en Devaney (1989) y Robinson (1999). Con la notación que traemos hasta aquí, los siguientes dos lemas, lema 3.7 y lema 3.8 se encuentran en (Devaney, 1989), por tal razón omitimos la demostración.

Lema 3.7. *Para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que:*

$$\bigcap_{k=0}^{n} B_\varepsilon^{-k}(I) = B_\varepsilon^{-n}(I) \tag{8a}$$

$$= \bigcup_{i_0,\ldots,i_{n-1}=0,1} I_{i_0 \ldots i_{n-1}}. \tag{8b}$$

Lema 3.8. *Para cada iteración $n \geq 2$ de la FTB, valen las siguiente propiedades:*

(a) *Para cualquier elección $i_0 \ldots i_{n-2} \in \{0,1\}$, tenemos que:*
$I_{i_0 \ldots i_{n-2}} \cap B_\varepsilon^{-n}(I) = I_{i_0 \ldots i_{n-2}0} \cup I_{i_0 \ldots i_{n-2}1}$ es la unión de dos intervalos no vacíos y disjuntos.

(b) *Para dos elecciones distintas digamos $(i_0 \ldots i_{n-1}) \neq (i'_0 \ldots i'_{n-1})$, tenemos que: $I_{i_0 \ldots i_{n-1}} \cap I_{i'_0 \ldots i'_{n-1}} = \emptyset$; es decir, $B_\varepsilon^{-n}(I)$ es la unión de 2^n intervalos cerrados disjuntos.*

(c) *B_ε aplica la componente $I_{i_0 \ldots i_{n-1}} \subset B_\varepsilon^{-n}(I)$ homeomorficamente sobre el intervalo $I_{i_1 \ldots i_{n-1}} \subset B_\varepsilon^{-n+1}(I)$*

Lema 3.9. *Si*
$\lambda := inf\{B'_\varepsilon(x) : x \in I_0 \cup I_1\} > 1$, entonces $L(I_{i_0 \ldots i_{n-1}}) \leq \lambda^{-n}(x_1 - x_0)$ para cualquier elección $I_{i_0 \ldots i_{n-1}} \subset B_\varepsilon^{-n}(I)$.

Proof. Considere una elección $I_{i_0 \ldots i_{n-1}} \subset B_\varepsilon^{-n}(I)$. Luego, por el lema 3.8 se tiene que, $I_{i_0 \ldots i_{n-1}} \subset \cdots I_{i_0 i_1} \subset I_{i_0} \subset I = [x_0, x_1]$. Usando el Teorema del Valor Medio, se tiene que $L(I_{i_0}) < \lambda^{-1}(x_1 - x_0)$. Aplicando sucesivamente esto a los siguientes intervalos de la elección se sigue el resultado. □

Teorema 3.10. *Si B es tipo Boole y $\varepsilon > 0$, entonces $\Lambda_\varepsilon := \{x \in I \backslash \cup_{n\geq 0} B_\varepsilon^{-n}(0) : B^n_\varepsilon(x) \in I, \forall n \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto de Cantor.*

Proof. De la proposición 3.4 podemos notar que el conjunto $\Lambda_\varepsilon \subset I_0 \cup I_1$.
1)Para verificar que Λ_ε es **compacto** basta notar que el lema 3.7 nos dice que Λ_ε es intersección numerable de intervalos compactos encajados. Entonces, Λ_ε es compacto.
2)Probemos que Λ_ε es **totalmente disconexo**. Notemos que $\lambda^{-k}(x_1 - x_0) \to 0$, cuando $k \to \infty$. $^{(*)}$
Ahora, supongamos que Λ_ε no es totalmente disconexo, es decir que existe un intervalo $J \subset \Lambda_\varepsilon = \bigcap_{n=0}^{+\infty} B_\varepsilon^{-n}(I)$, luego por $^{(*)}$ existe un $n > 1$

tal que $\lambda^{-n}(x_1 - x_0) < L(J)$, además por el lema 3.7 tenemos que $J \subset B_\varepsilon^{-n}(I) = \bigcup_{i_0,\ldots,i_{n-1}=0,1} I_{i_0\ldots i_{n-1}}$, la cual por el lema 3.8 sabemos que es unión de intervalos disjuntos dos a dos. Por lo tanto existe una colección $j_0,\ldots,j_{n-1} \in \{0,1\}$, tal que $J \subset I_{j_0\cdots j_{n-1}}$, por el lema anterior (3.9), obtenemos que $L(J) \leq L(I_{j_0\cdots j_{n-1}}) \leq \lambda^{-n}(x_1 - x_0)$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto Λ_ε no posee intervalos, en consecuencia Λ_ε es totalmente disconexo.

3) La demostración de que Λ_ε es **perfecto**, es igual a la realizada en el Teorema 4.1 en Robinson (1999). En conclusión Λ_ε es un conjunto de Cantor. □

3.2 Prueba de los resultados principales

Definiremos $\Sigma_2 := \{s = (s_0 s_1 \ldots s_j \ldots) : s_j \in \{0,1\}\ j \in \mathbb{N}\}$. Este conjunto es llamado el espacio de sucesiones de dos símbolos 0 y 1, diremos que una secuencia $s_i \ldots s_j$ es una "**palabra**"del espacio Σ_2 de longitud $j - i$. Además, diremos que $s,t \in \Sigma_2$ son iguales $(s = t)$, si $s_j = t_j$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

Con la métrica $d(s,t) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i}$, es bien conocido que Σ_2 es un conjunto compacto. La función *shift* $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ esta definida como $\sigma(s_0 s_1 s_2 \ldots) = (s_1 s_2 s_3 \ldots)$. También, es bien conocido que σ es continua, el conjunto de punto periódicos es denso y trasitivo.

Proof. **(Teorema 1).**
Sea B una trasformación tipo Boole, $\varepsilon > 0$ y sea B_ε una traslación de B. Considere $S : \Lambda_\varepsilon \longrightarrow \Sigma_2$, para cada $x \in \Lambda_\varepsilon$, $S(x) = s_0 s_1 s_2 \ldots$ donde $s_i = 0$ si $B_\varepsilon^i(x) \in I_0$ y $s_i = 1$ si $B_\varepsilon^i(x) \in I_1$. S es llamada el **Itinerario** de x. La idea es probar que S es una conjungación topológica entre σ y B_ε, de esta manera B_ε tiene las mismas propiedadades dinámicas que σ, es decir, $B_\varepsilon|_{\Lambda_\varepsilon}$ es transitiva y el conjunto de puntos periódicos son densos en Λ_ε. Notemos que para todo $x \in \Lambda_\varepsilon$ se tiene que $x = I_{i_0\ldots i_n\ldots}$ y el itinerario de x es precisamente $S(x) = i_0 \ldots i_n \ldots$.
Inyectividad. Sean $x,y \in \Lambda_\varepsilon$ supongamos que $S(x) \neq S(y)$, luego existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $B_\varepsilon^j(x)$ y $B_\varepsilon^j(y)$ están en diferentes componentes conexas, es decir, si $S(x) = i_0 \ldots i_j \ldots$ y $S(y) = i'_0 \ldots i'_j \ldots$ entonces, $y \in I_{i'_0\ldots i'_j}$ y $x \in I_{i_0\ldots i_j}$, donde $i_j \neq i'_j$; luego, por el lema 3.8 $I_{i'_0\ldots i'_j} \cap I_{i_0\ldots i_j} = \emptyset$, así se concluye que $x \neq y$.

Sobreyectividad. Considere $s \in \Sigma_2$, recordemos lo siguiente: $I_{s_0\ldots s_n} = I_{s_0} \cap B_\varepsilon^{-1}(I_{s_1}) \cap \ldots \cap B_\varepsilon^{-n}(I_{s_n})$; luego, existe $I_{s_0 s_1\ldots} = \cap_{k=0}^{+\infty} I_{s_0\ldots s_k}$ una sucesión encajada de intervalos compactos, donde $s_k = 0:1$ para $k \geq 0$. Por lo tanto existe $x \in I_s = \cap_{k=0}^{+\infty} B_\varepsilon^{-k}(I_{s_k})$. En consecuencia, si $B_\varepsilon^k(x) \in I_{s_k}$ para todo $k \geq 0$, entonces $S(x) = s$.
Continuidad. Sea $x \in \Lambda_\varepsilon$ y supongamos que $S(x) = s_0 \ldots s_n \ldots$. Sea $\varepsilon' > 0$, luego existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^n} < \varepsilon'$ y consideremos el intervalo $I_{s_0\ldots s_n}$ y elijamos $\delta = \lambda^{-n-1}(x_1 - x_0)$ tal que si existe un $y \in \Lambda_\varepsilon$ con $|x - y| < \delta$ entonces $x,y \in I_{s_0\ldots s_n}$; es decir, $S(x)$ coincide con $S(y)$ en los primeros $n+1$ términos de la sucesión. En consecuencia, $d(S(x),S(y)) \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon'$.
Continuidad de la inversa. La inversa de la función itinerario esta definida como: $S^{-1} : \Sigma_2 \longmapsto \Lambda_\varepsilon$, donde $S^{-1}(s_0 \ldots s_n \ldots) = x$.
Dado $\varepsilon' > 0$, por el lema 3.9 sabemos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda^{-n-1}(x_1 - x_0) < \varepsilon'$. Sean $s,t \in \Sigma_2$ tales que $d(s,t) < \frac{1}{2^n}$ entonces, se cumple que $s_j = t_j$ para todo $j = 0:n$. Por lo tanto $S^{-1}(s), S^{-1}(t) \in I_{s_0\ldots s_n}$, es decir que tomando $\delta = \frac{1}{2^n}$ se tiene que $|S^{-1}(s) - S^{-1}(t)| \leq \lambda^{-n-1}(x_1 - x_0) < \varepsilon'$, así, se concluye que S^{-1} es continua.
Nos falta probar que, $S \circ B_\varepsilon(x) = \sigma \circ S(x)$, para todo $x \in \Lambda_\varepsilon$. Para ello, sea $x \in \Lambda_\varepsilon$, luego sabemos que existe una única intersección de intervalos encajados tal que $x = \cap_{n\geq 0} I_{s_0\ldots s_n\ldots}$, determinada por el *itinerario* de $S(x) = s = (s_0 s_1 \ldots)$, como $I_{s_0\ldots s_n} = I_{s_0} \cap B_\varepsilon^{-1}(I_{s_1}) \cap \ldots \cap B_\varepsilon^{-n}(I_{s_n})$, por el lema 3.8 sabemos que $B_\varepsilon(I_{s_0\ldots s_n}) = I_{s_1\ldots s_n}$. Por lo tanto $B_\varepsilon(x) \in \cap_{n\geq 1} I_{s_1\ldots s_n}$; en consecuencia,

$$\begin{aligned} S(B_\varepsilon(x)) &= S(B_\varepsilon(\cap_{n\geq 0} I_{s_0\ldots s_n})) && \text{(9a)}\\ &= S(\cap_{n\geq 1} I_{s_1\ldots s_n}) && \text{(9b)}\\ &= (s_1 s_2 \ldots) && \text{(9c)}\\ &= \sigma(S(x)) && \text{(9d)} \end{aligned}$$

□

Corolario 3.11. *Sea B una transformación tipo Boole. Si $\varepsilon_1 > 0$ y $\varepsilon_2 > 0$, entonces $B_{\varepsilon_1}|_{\Lambda_{\varepsilon_1}}$ y $B_{\varepsilon_2}|_{\Lambda_{\varepsilon_2}}$ son topológicamente conjugados.*

Proof. Sean $\varepsilon_1 > 0$ y $\varepsilon_2 > 0$ arbitrarios, por el Teorema 1, se concluye que tanto B_{ε_1} como B_{ε_2} son topológicamente conjugados con σ, donde la aplicación itinerario es la conjugación topológica para dichas funciones. Por transitividad, se sigue que $B_{\varepsilon_1}|_{\Lambda_{\varepsilon_1}} \sim B_{\varepsilon_2}|_{\Lambda_{\varepsilon_2}}$. □

Como consecuencia de la demostración obtenemos que

Teorema 3.12. *Sea $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\longrightarrow\mathbb{R}$ de clase C^1 tal que $f'(x)>0$ para todo $x\neq 1$. Si existen intervalos $J_0=[a_0,b_0]\subset(-\infty,0)$ y $J_1=[a_1,b_1]\subset(0,+\infty)$ tales que $f'(x)>1$ para todo $x\in J_0\cup J_1$ y $f(J_0)=[a_0,b_1]=f(J_1)$, entonces*

a) *$\Lambda_f=\bigcap\limits_{n\geq 1} f^{-n}(J_0\cup J_1)$ es un conjunto de cantor invariante por f;*

b) *$f|_{\Lambda_f}$ es transitivo y el conjunto de puntos periódicos es denso;*

c) *$f|_{\Lambda_f}$ es topológicamente conjugado al shift unilateral $\sigma:\Sigma_2\to\Sigma_2$.*

3.3 Demostración del Teorema Principal

Recordemos que

$$\mathcal{F}_i:=\{f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\mapsto\mathbb{R}: f \text{ es de clase } C^i\},\quad (10)$$

para $i=0,1,2$. Decimos que $g\in\mathcal{F}_0$ es $\delta-C^0$ próximo de B_ε si $|g(x)-B_\varepsilon(x)|<\delta$ para todo $x\neq 0$. También, decimos que $g\in\mathcal{F}_1$ es $\delta-C^1$ próximo de B_ε si g es $\delta-C^0$ próximo de B_ε y $|g'(x)-B'_\varepsilon(x)|<\delta$ para todo $x\neq 0$.

Lema 3.13. *Para cualquier $0<\delta_0<1$ y para toda función $g\in\mathcal{F}_0$ tal que g es δ_0-C^0 próximo de B_ε, se cumple que:*

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ *y* $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$.

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=-\infty$ *y* $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)=+\infty$

Proof. Por hipótesis tenemos que:

$$\begin{aligned}|g(x)-B_\varepsilon(x)|&<\delta_0,\text{ para todo } x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\\ &\iff -\delta_0<g(x)-B_\varepsilon(x)<\delta_0\\ &\iff B_\varepsilon(x)-\delta_0<g(x)<B_\varepsilon(x)+\delta_0,\end{aligned}$$

Luego, aplicando los límites correspondientes obtenemos el resultado. □

El siguiente resultado es bien conocido, la diferencia aquí es que precisamos el intervalo donde aparece el nuevo punto fijo de la transformación perturbada.

Observación 3.14. Si B una transformación tipo Boole y $\varepsilon>0$, entonces dado $M>0$ existe $\lambda>1$ tal que $B'_\varepsilon(x)>\lambda$ para todo $x\in[-M,0)\cup(0,M]$.

Lema 3.15. *Si B una transformación tipo Boole y $\varepsilon>0$, entonces existe $\delta_2>$ tal que si g es δ_2-C^1 próximo de B_ε se tiene:*

a) *existe un único $p_+\in(0,+\infty)$ tal que $g(p_+)=p_+$;*

b) *existe un único $p_-\in(-\infty,0)$ tal que $g(p_-)=p_-$;*

c) *existe $\lambda>1$ tal que $g'(x)>\lambda$ para todo $x\in[p_-,0)\cup(0,p_+]$.*

Proof. Como $B_\varepsilon(x)-x\longrightarrow\varepsilon$ cuando $x\to+\infty$ y también $B_\varepsilon(x)-x\longrightarrow-\varepsilon$ cuando $x\to-\infty$, existe $M>\max\{x_1,-x_0\}$ tal que $|B_\varepsilon(x)-x|>\frac{\varepsilon}{2}$, para todo $|x|\geq M$. Luego, por la observación 3.14 existe $\lambda_1>1$ tal que $B'_\varepsilon(x)>\lambda_1$ para todo $x\in[-M,0)\cup(0,M]$. Ahora, por otro lado, considere $\delta>0$, pero acotado superiormente de la siguiente forma: $\delta<\min\{-\frac{1}{4}x_0,\frac{1}{4}x_1,\frac{1}{4}(M-x_1),\frac{1}{4}(x_0+M)\}$. También, considere $\delta_1>0$ suficientemente pequeño tal que $\delta_1<\frac{1}{2}\min\{|B_\varepsilon(x_1-\delta)-(x_1-\delta)|,|B_\varepsilon(x_1+\delta)-(x_1+\delta)|,\frac{\varepsilon}{2},(\lambda_1-1)\}$. Para este δ_1, considere g δ_1-C^1 próximo de B_ε. Entonces,

$$g(x_1-\delta)-(x_1-\delta)<\delta_2+B_\varepsilon(x_1-\delta)-(x_1-\delta),\quad (11a)$$

$$-\delta_2+B_\varepsilon(x_1+\delta)-(x_1+\delta)<g(x_1+\delta)-(x_1+\delta).\quad (11b)$$

Como, $\delta+B_\varepsilon(x_1-\delta)-(x_1-\delta)<\delta_2-2\delta_2<0$ se sigue que, $g(x_1-\delta)-(x_1-\delta)<0$, es decir, $g(x_1-\delta)<(x_1-\delta)$. Ahora, de la forma en que fue tomado δ_2 se tiene que $-\delta_2+B_\varepsilon(x_1+\delta)-(x_1+\delta)>-\delta_2+2\delta_2>0$, por tanto $g(x_1+\delta)>(x_1+\delta)$. Por el Teorema de valores intermedios existe $p_+\in(x_1-\delta,x_1+\delta)$. Por otro lado, ya que g es δ_1-C^1 próximo de B_ε. Entonces, $-\delta_2+B'_\varepsilon(x)<g'(x)<\delta_2+B'_\varepsilon(x)$ para todo $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Ya que, δ_2 se tiene que $-\delta_2+B'_\varepsilon(x)>-\delta_2+\lambda_1$ para todo $x\in(0,M]$ y de la forma en que tomamos δ_2, tenemos $-\delta_2+B'_\varepsilon(x)>-\frac{1}{2}(\lambda_1-1)+\lambda_1=1+\frac{1}{2}\lambda_1$. De esto, tomando $\lambda:=1+\frac{1}{2}\lambda_1$, resulta que $g'(x)>\lambda$ para todo $x\in(0,M]$. Esto junto con el hecho que $p_+\in(0,M]$ prueba el item c) y prueba que p_+ es el único punto fijo en $(0,M]$. Sea $x>M$, entonces $B_\varepsilon(x)-x>\frac{\varepsilon}{2}$. Como $-\delta_2+B_\varepsilon(x)<g(x)$ y de la escogencia de δ_2

$$-\delta_2+B_\varepsilon(x)-x>-\delta_2+\frac{\varepsilon}{2}>-\delta_2+2\delta_2>0.\quad (12)$$

Luego, $g(x)>x$. Con esto probamos el item a). La prueba del item b) es análoga y se toma al final el menor δ_2. □

Proof. **Teorema Principal 1**
Sea $\varepsilon>0$, considere $\delta_2>0$ como en el lema 3.15.

Considere $g \in \mathcal{F}_1$ tal que g es $\delta_2 - C^1$ próximo de B_ε. Entonces, $0 < 1-\delta_2 < \{g'(x) : x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\}$ lo que implica que g es monótona creciente restringida sobre cada componente conexa, en consecuencia $g|_{(-\infty,0)} : (-\infty,0) \mapsto \mathbb{R}$ y $g|_{(0,+\infty)} : (0,+\infty) \mapsto \mathbb{R}$ son homeomorfismos. Denotemos los puntos fijos de g como $y_0 := p_-$ y $y_1 ;= p_+$. También, denotaremos por y_{10} a la preimagen positiva de y_0 y y_{01} a la preimagen negativa de y_1, esto es $g_+^{-1}(y_0) = y_{10}$ y $g_-^{-1}(y_1) = y_{01}$. Definimos $J_0 := [y_0, y_{01}] \subset (-\infty, 0)$ y $J_1 := [y_{10}, y_1] \subset (0,+\infty)$. Entonces, por el lema 3.15 $g'(x) > 1$ para todo $x \in J_0 \cup J_1$. En consecuencia, aplicando el Teorema 3.12

$$\Lambda_g = \bigcap_{n\geq 1} f^{-n}(J_0 \cup J_1) \tag{13}$$

es un conjunto de cantor, Λ_g es transitivo respecto $g|_{\Lambda_g}$ y $g|_{\Lambda_g}$ es topológicamente conjugado al shift unilateral $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$. Por el Teorema 1.2, $B_\varepsilon|_{\Lambda_{B_\varepsilon}}$ es topológicamente conjugado al shift unilateral $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$. Por transitividad de la conjugación topológica $g|_{\Lambda_g}$ es topológicamente conjugado a $B_\varepsilon|_{\Lambda_{B_\varepsilon}}$. En consecuencia, B_ε es robustamente transitivo. □

Corolario 3.16. *Sea $g \in \mathcal{F}_1$ tal que g es $\delta_2 - C^1$ próximo de B_ε. Si $x \in \Lambda_g^c \backslash (\cup_{n\geq 0} g^{-n}(0))$, entonces $|g^n(x)| \to +\infty$, cuando $n \to +\infty$.*

La prueba es análoga a la proposición 3.5, aplicando el lema 3.15

3.4 Ejemplos de Aplicación

Considere la transformación $B_a : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $B_a(x) = x - \frac{a}{x}$. Note que, $B_a'(x) > 1$ para todo $x \neq 0$, B_a tiene asíntota vertical en $x = 0$ y la recta $y = x$ es una asíntota oblicua. B_a no tiene puntos fijos, de hecho, $B_(x) < x$ si $x > 0$ y $B_a(x) < x$ si $x < 0$. Lo que significa que B_a es una transformación tipo Boole para toda $a > 0$. Aplicando el Teorema Principal a la transformación

$$B_{a\varepsilon}(x) := \begin{cases} B_a(x) + \varepsilon, & \text{si} \quad x > 0 \\ B_a(x) - \varepsilon, & \text{si} \quad x < 0 \end{cases} \tag{14}$$

tenemos que $B_{a\varepsilon}$ es robustamente transitiva para todo $a > 0$ y $\varepsilon > 0$. Esto es, existe un conjunto de cantor $\Lambda_{a\varepsilon}$ invariante tal que $B_{a\varepsilon}$ restricto a $\Lambda_{a\varepsilon}$ es transitiva. Además el conjunto de puntos periódicos es denso en $\Lambda_{a\varepsilon}$.

4 Conclusión

a) Si consideramos $B(x) = x - \frac{1}{x}$ la famosa transformación de Boole. Entonces su traslación B_ε converge uniformemente a B, cuando $\varepsilon \to 0$. Observe que, B está siendo aproximada por transformaciones robustamente tansitivas. Note que, para cada $\varepsilon > 0$, $\Lambda_\varepsilon \subset [-\frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon}]$, donde $[-\frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon}]$ es el intervalo compacto más pequeño que contiene a Λ_ε. En (Muñoz, 2015) se prueba para B y las transformaciones tipo Boole que $\Lambda_B = \mathbb{R} \setminus \cup_{n\geq 0} B^{-n}(0)$ es un conjunto residual, totalmente disconexo, invariante y transitivo. Contrastando ésto con nuestro resultado, nos hacemos las siguientes preguntas:

Pregunta 4.1. Si B es una transformación tipo Boole. De qué forma converge Λ_ε a Λ_B, cuando $\varepsilon \to 0$.

Pregunta 4.2. A patir de qué valor de $\varepsilon > 0$ se obtiene que la medida de Lebesgue de Λ_ε es positiva.

Pregunta 4.3. Si B es una transformación tipo Boole. B_ε posee una medida invariante absolutamente continua a la de Lebesgue. Tal medida es ergódica.

b) De la forma en que se abordó la demostración del Teorema 1.2, si $g \in \mathcal{F}_1$ es una perturbación C^1 de una transformación tipo Boole, tal que g tiene un único punto fijo en cada componente conexa, digamos $y_0 < 0$ y $y_1 > 0$, y g satisface que $g'(x) > 1$ para todo $x \in [y_0, y_1]$. Enotnces, existe un conjunto de cantor Λ_g invariante tal que g restricto a Λ_g es transitivo. Haciendo el mismo tipo de perturbación que se hizo para la demostración del Teorema Principal se puede mostrar que g es robustamente transitiva.

Para probar que Λ_g es transitivo, se hace consiguiendo una conjugación topológica entre $g|_{\Lambda_g}$ el shift unilateral $\sigma : \Sigma_2 \longrightarrow \Sigma_2$. En consecuencia $g|_{\Lambda_g}$ tiene la misma dinámica que las traslaciones de las transformaciones tipo Boole.

c) Sea B una transformación tipo Boole. Consideremos $\varepsilon > 0$ y definamos la traslación

$$B_\varepsilon(x) := \begin{cases} B(x) - \varepsilon, & \text{si} \quad x > 0 \\ B(x) + \varepsilon, & \text{si} \quad x < 0 \end{cases} \tag{15}$$

Note que, B_ε no posee puntos fijos, pero sigue teniendo asíntota vertical en $x = 0$ y $B_\varepsilon'(x) > 1$ para todo $x \neq 0$. En (Muñoz, 2015) se prueba que $\Lambda_{B_\varepsilon} = \mathbb{R} \setminus \cup_{n\geq 0} B_\varepsilon^{-n}(0)$ es un conjunto residual, totalmente disconexo invariante y transitivo respecto a B_ε. Entonces

Pregunta 4.4. La transformación B_ε es robustamente transitiva.

d) Considere la familia a dos parámetros $B_{a\varepsilon}$ de la subsección 3.4, aplicando el Teorema Principal y el corolario 3.11, se tiene que si los parámetros a, a', ε, $\varepsilon' > 0$, entones $B_{a\varepsilon}|_{\Lambda_{a\varepsilon}}$ es topológicamente conjugado a $B_{a'\varepsilon'}|_{\Lambda_{a'\varepsilon'}}$.

e) Considere la familia a dos parámetros de la transformación de Boole, $B_{a\varepsilon}(x) = x - \frac{a}{x} + \varepsilon$, para $a > 0$ y $\varepsilon > 0$, estudiada en (Prykarpatsky y Feldman, 2006).

Pregunta 4.5. $B_{a\varepsilon}(x) = x - \frac{a}{x} + \varepsilon$, para $a > 0$ y $\varepsilon > 0$, posee un conjunto invariante totalmente disconexo, no cerrado, no acotado y robustamente transitivo.

Conflicto de Intereses

Los autores declaramos que no existe ningún tipo de Conflicto de Interés en este trabajo.

Referencias

Aaronson, J. (1983). The eigenvalues of nonsingular transformations. *Israel Journal of Mathematics*, *45*, 297–312.

Aaronson, J. (2007). Ergodic theory for inner functions of the upper half plane. *Ann. Inst. H. Poincaré*, *BXIV*, 233–253.

Adler, R. y Weiss, B. (1973). The ergodic infinite measure preserving transformation of boole. *Israel Journal of Mathematics*, *16*(3), 263–278.

Boole, G. (1857). On the comparasion of transcendents with certain applications to the theory of definite integrals. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, *147*(III), 745–803.

Devaney, R. L. (1989). *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems, second edition*. USA: Addison Wesley.

Muñoz, S. (2015). Robust transitivity of maps of the real line. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, *35*(3), 1163–1177.

Neuwirth, J. H. (1978). Ergodicity of some mapping of the circle and the line. *Israel Journal of Mathematics*, *31*, 359–367.

Prykarpatsky, A. K. y Feldman, J. (2006). On the ergodic and spectral properties of generalized boole transformations. i. *Miskolc Mathematical Notes*, *7*(1), 91–99.

Robinson, C. (1999). *Dynamical Systems: Stability, Symbolic Dynamics, and Chaos*. Boca Ratón: CRC Press, Taylor & Francis Group.