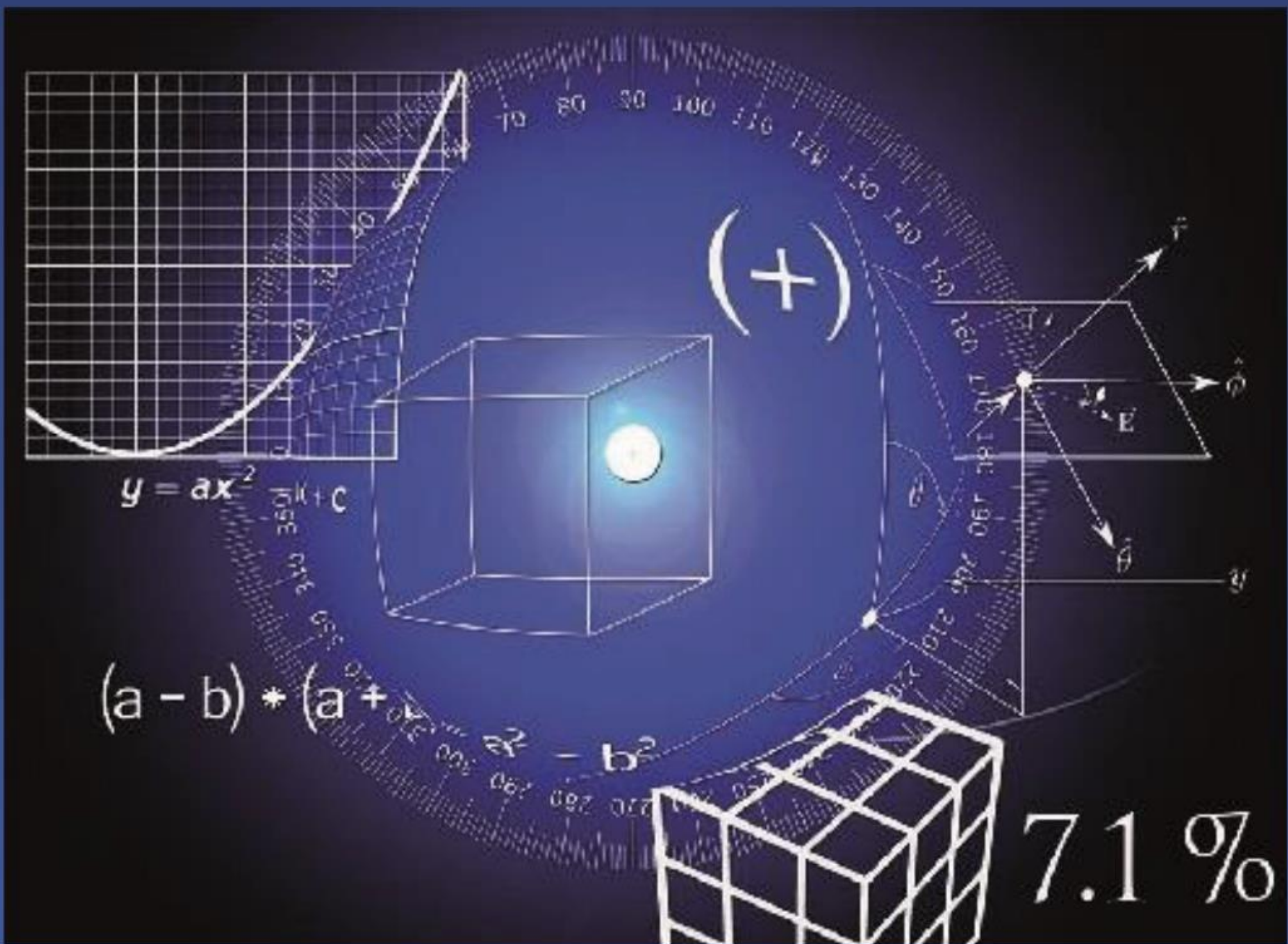
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CHIMBORAZO
VICERRECTORADO DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN
DIRECCIÓN DE POSGRADO
MAESTRÍA EN CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN,
APRENDIZAJE DE LA FÍSICA

UNIDAD CERO
LENGUAJE DE LA FÍSICA



AUTORA:
GABRIELA ELIZABETH VELOZ BASTIDAS
COAUTOR:
MSC. VÍCTOR HUGO CAIZA

ÍNDICE DE CONTENIDO

PRESENTACIÓN....5

CONTRIBUCIÓN DE LOS FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS EN EL APRENDIZAJE DE LA FÍSICA. 6

FUNDAMENTOS EPISTEMOLÓGICOS Y PEDAGÓGICOS. 7

TEMA 1....10

OPERACIONES ARITMÉTICAS CON NÚMEROS REALES 10

1.1 Cuadro sinóptico de operaciones aritméticas....11

1.2 Ejemplos resueltos....12

1.3. ACTIVIDADES EN CLASE....15

1.4 EJERCICIOS PROPUESTOS....17

1.5 EVALUACIÓN 18

1.6. Ejercicio de aplicación de las operaciones aritméticas en la física....20

TEMA 2....25

ÁLGEBRA....25

2.1. Operaciones con expresiones algebraicas 26

2.1.1 Suma de polinomios 26

2.1.2. Resta de polinomios 26

2.1.3. Multiplicación de polinomios 27

2.1.4 Actividad en Clase 28

2.2 Funciones....29

2.2.1. Función lineal....29

2.2.2. Gráfica de una función lineal y una función afín....30

2.2.3. Significado de los términos la función lineal. 30
2.2.4. Evaluación de la función lineal 30
2.2.5. Pendiente de la recta 31
2.2.6. Las funciones con relación a la pendiente se pueden clasificar en tres tipos: 33
2.2.7. Ecuación de la recta 33
2.2.8. Rectas paralelas y rectas perpendiculares. 35
2.2.9. Función cuadrática 37
2.2.10. Evaluación de una función cuadrática 37
2.2.11. Gráfica de una función cuadrática 38
2.2.12. Raíces de una función cuadrática 39
2.2.13. ACTIVIDADES EN CLASE 41
2.2.14. EJERCICIOS PROPUESTOS 43
2.2.15 EVALUACIÓN 45
2.2.16. Ejercicio de física con la aplicación de funciones, pendiente de la recta, ecuación de la recta. 46
2.2.17. ECUACIONES 49
2.2.18. Pasos para resolver ecuaciones de primer grado. 49
2.2.19. Trucos para resolver ecuaciones de primer grado 49
2.2.20. Ecuaciones de segundo grado 50
2.2.21. Pasos para resolver ecuaciones de segundo grado. 50
2.2.22. Factorización Simple 50
2.2.23. Formula Cuadrática. 51
2.2.24. Sistema de ecuaciones 53
2.2.25. ACTIVIDAD EN CLASE N.-2 55

2.2.26. EJERCICIOS PROPUESTOS. 57

2.2.27. EVALUACIÓN 58

2.2.28. Ejercicios de Física con la Aplicación de Resolución de Ecuaciones........ 59

TEMA 3

TRIGONOMETRÍA Y GEOMETRÍA 61

3.1ÁNGULOS........ 63

3.2. Conversión de medidas de ángulos 64

3.3. Equivalencias entre grados sexagesimales y radianes 64

3.4. Teoremas de ángulos 65

3.5. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS........ 65

3.6. Funciones Trigonométricas de Ángulos Característicos........ 67

3.7. Resolución de triángulos rectángulos........ 67

3,8, Pasos para resolver un triángulo rectángulo cuando se conoce el valor de un lado y un ángulo. 67

3.9. Pasos para resolver un triángulo rectángulo cuando se conoce 2 lados........ 69

3.10. Teoremas de triángulos 72

3.11ACTIVIDAD EN CLASE 73

3.12.EVALUACIÓN. 75

3,13. Ejercicio de física en el bloque curricular movimiento en dos dimensiones con la aplicación de la trigonometría. 76

3.14. EJERCICIOS PROPUESTOS........ 79

TEMA 4........ 81

EJERCICIOS PROPUESTOS DE APLICACCIÓN DE LOS FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS BÁSICOS EN FÍSICA (MOVIMIENTO EN DOS DIMENSIONES)........ 81

4.1Ejercicios propuestos de aplicacción de las operaciones aritméticas en física (movimiento en dos dimensiones) 81

4.2. Ejercicios propuestos de aplicacción de álgebra en física(movimiento en dos dimensiones) 84

4.3. Ejercicio propuesto de aplicaccion de trigonometría y geometría en física (movimiento en dos dimensiones) 87

5. EVALUACIÓN FINAL....90

BIBLIOGRAFÍA....93

6.ANEXO....94

PRESENTACIÓN

Los fundamentos matemáticos son importantes para el aprendizaje de la física, ya que la física estudia la naturaleza y la matemática permite expresar los resultados.
La unidad cero "Lenguaje de la Física" contiene los fundamentos matemáticos necesarios para el aprendizaje de la física, explicando de manera fácil, desarrollando las destrezas por medio de actividades, tareas en clase, ejercicios resueltos y propuestos para que los estudiantes de bachillerato pueden consolidar los conocimientos matemáticos y desarrollar con facilidad los ejercicios de física en bloque curricular movimiento en dos dimensiones.

El currículo plasma en mayor o menor medida las intenciones educativas del país, se señalan las pautas de acción u orientaciones sobre cómo proceder para hacer realidad estos objetivos y demostrar que efectivamente se han alcanzado. Un currículo sólido, bien fundamentado, técnico, coherente y ajustado a las necesidades de aprendizaje de la sociedad de referencia, junto con recursos que afirmen las condiciones mínimas necesarias para el mantenimiento de la continuidad y la coherencia en la acumulación de las intenciones educativas garantizan procesos de enseñanza y aprendizaje de calidad. (EDUCACIÓN, 2009)

Se aspira que al insertar la unidad cero en los contenidos del currículo de física, se resuelva un problema educativo y se logre que los estudiantes de primero de bachillerato mejoren su rendimiento académico en dicha asignatura.

Así como también se pretende que sea una guía para el docente, con la finalidad de reforzar los conocimientos matemáticos y mejorar la destreza de resolución de ejercicios de física en el bloque curricular movimiento en dos dimensiones.

CONTRIBUCIÓN DE LOS FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS BÁSICOS PARA EL APRENDIZAJE DE LA FÍSICA.

Empiezo mencionando la frase de Galileo Galilei: “El libro de la naturaleza está escrito en el lenguaje matemático”, con ella sintetizo la importancia de mi trabajo investigativo y la creación de la unidad cero Lenguaje de la física.

En primer año de bachillerato los estudiantes tienen mayor conciencia de la importancia de las matemáticas, siendo el año en que de acuerdo a su currículo inician con la signatura de física y los estudios realizados revelan la aplicación concreta de la matemática en la física.

La física utiliza símbolos para predecir los parámetros importantes de un fenómeno natural y las matemáticas ofrecen un apoyo para formular sus resultados.
Los conocimientos fundamentales para el aprendizaje de la física son: aritmética, algebra, trigonometría incluso cálculo para solventar el porqué de un fenómeno. Y la destreza de su resolución depende de sus conocimientos en matemáticas.

Los componentes del perfil de salida del bachillerato, propagan las características disciplinares y tienen un carácter integrador; cubren un conjunto de capacidades que aseguran un desarrollo integral y pleno de los estudiantes. Estos componentes se enlazan con tres valores fundamentales: justicia, innovación y solidaridad. Por tal razón con la creación de la unidad cero” Lenguaje de la física” se busca que los estudiantes tengan conocimientos sólidos que les permita resolver ejercicios con facilidad en la Asignatura de Física contribuyendo así, para que los estudiantes lleguen a cumplir con el perfil de salida del bachillerato que plantea el Ministerio de Educación

FUNDAMENTOS EPISTEMOLÓGICOS Y PEDAGÓGICOS.

Lucero Álvarez Miño manifiesta en el resumen de su artículo científico "La física es considerada un área del conocimiento cuyo lenguaje es la matemática". (Miño, 2016)

FUNDAMENTOS EPISTEMOLÓGICOS

Leonor Colombo de Cudmani manifiesta" Nuestra experiencia como profesores de Física y formadores de futuros profesores nos llevaba a intuir su importancia para favorecer el aprendizaje y la enseñanza de la disciplina así como para la formación en investigación".

Bunge (1958), quien sostiene que el conocimiento científico es fáctico, analítico, especializado, claro y preciso, comunicable, predictivo, verificable, metódico y sistémico.

- Khun (1962), quien atribuye importancia a los factores sociológicos en la producción de conocimiento científico, considerando que los paradigmas pueden ser susceptibles de cambio y refutando la visión acumulativa y gradual de la ciencia.

Morin (2007), quien considera que todo conocimiento constituye al mismo tiempo construcción y reconstrucción a partir de señales, signos y símbolos, y del contexto planetario.

FUNDAMENTOS PEDAGÓGICOS

En cuanto al fundamento pedagógico.

Ausubel postula en su teoría del conocimiento que los conocimientos previos son importantes para poder llegar a un aprendizaje significativo del nuevo conocimiento, desde el enfoque constructivista, crítico y reflexivo, la enseñanza de la todas las ciencias, persiguen el aprendizaje significativo y la construcción de conceptos nuevos a partir de los conocimientos y experiencias previas de los estudiantes. La personalización del aprendizaje del área de Física está relacionada con el conocimiento de las fortalezas y debilidades de cada estudiante, la aplicación de la evaluación formativa, el desarrollo de habilidades científicas y cognitivas por medio de estrategias, técnicas e instrumentos adecuados, adaptados a los diversos ritmos, estilos de aprendizaje y contextos.

En el planteamiento de la unidad cero "LENGUAJE DE LA FÍSICA" se establecieron 5 temas, los mismos que se articulan con las destrezas con criterios de desempeño con secuencia, orden y progresividad, de acuerdo con el bloque curricular Movimiento en dos dimensiones.

Es necesario aclarar que la unidad cero Lenguaje de la física no se refiere a la enseñanza global de la matemática, su diseño responde a dos objetivos importantes: proporcionar un aprendizaje significativo en el bloque curricular movimiento en dos dimensiones, así como reforzar los fundamentos matemáticos básicos y más que nada necesarios, para poder resolver ejercicios del movimientos en dos dimensiones de forma clara y lógica.

ESQUEMA DE LA UNIDA CERO "LENGUAJE DE LA FÍSICA"

NUMEROS REALES

Operaciones aritméticas

Supreción de signos de agrupación

ALGEBRA

Operaciones Algebraicas

Funciones

Función Lineal

Función afín

Pendiente de la recta.

Ecuación de la recta

Función cuadrática

Ecuaciones de primer y segundo grado

Sistema de ecuaciones

TRIGONOMETRÍA Y GEOMETRÍA.

Ángulos

Tipos de ángulos

Teoremas de ángulos

Conversión de medidas de ángulos

Funciones Trigonométricas

Funciones trigonométricas de ángulos notables

Resolución de triángulos rectángulos

Teoremas de Triángulos

OBJETIVOS

OBJETIVO GENERAL

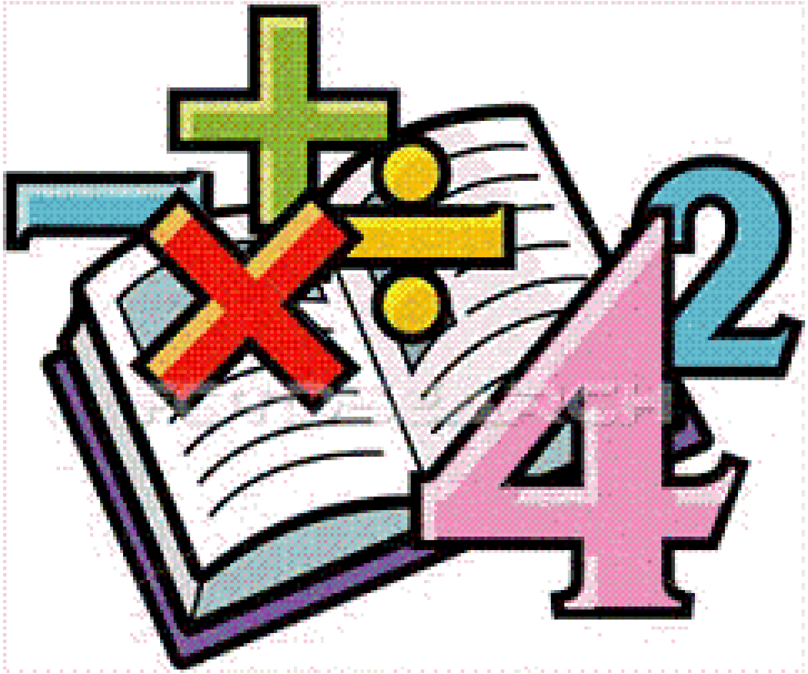
Reforzar los fundamentos matemáticos básicos para mejorar el aprendizaje de la física en el bloque curricular movimiento en dos dimensiones en los estudiantes de primer año de bachillerato.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS.

- Fortalecer los conocimientos sobre la resolución de operaciones aritméticas, para mejorar el aprendizaje de la física en el bloque curricular movimiento en dos dimensiones en los estudiantes de primer año de bachillerato.
- Retroalimentar los conocimientos sobre operaciones algebraicas y resolución de ecuaciones, para mejorar el aprendizaje de la física en el bloque curricular movimiento en dos dimensiones en los estudiantes de primer año de bachillerato.
- Fortificar los conocimientos de trigonometría, para mejorar el aprendizaje de la física en el bloque curricular movimiento en dos dimensiones en los estudiantes de primer año de bachillerato.

TEMA 1

OPERACIONES ARITMÉTICAS CON NÚMEROS REALES



Fuente: Elaborado por Carlos tenorio

DESTREZA CON CRITERIO DE DESEMPEÑO	CRITERIO DE EVALUACIÓN	VALOR
Realizar operaciones combinadas en Z aplicando el orden de operación, y verificar resultados utilizando la tecnología.	CE.M.4.1. Emplea las relaciones de orden, las propiedades algebraicas (adición y multiplicación), las operaciones con distintos tipos de números (Z, Q, I).	Puntualidad

Fuente. Currículo 2019 del Ministerio de Educación
Elaborado por: Gabriela Veloz

1.1 CUADRO SINÓPTICO OPERACIONES ARITMÉTICAS

OPERACIONES ARITMÉTICAS CON NÚMEROS REALES

- **Realizar las operaciones que estén dentro de los signos de agrupación .**
  - Para suprimir los signos de agrupación debe tomar encuenta .
    - Se debe suprimir en el siguiente orden:parentesis, corchetes y llaves.
    - Si los signos de agrupación son independientes uno del otro puede suprimir a la vez.
    - Si los signos de agrupación que se van a suprimir se encuentran precedidos de :
      - Un número debe suprimir multiplicando el número por los números que se encuentren dentro del signo de agrupación.
      - Un signo + debe suprimir sin cambiar de signo a los números que se encuentren dentro del signo de agrupación.
      - Un signo - debe suprimir cambiando de signo a los números que se encuentren dentro del signo de agrupación.
- Resolver potencias y raices
  - Para las potencias debe tomar encuenta:
    - Si la base es negativa
      - Y el exponente par la potencia es positiva
      - Y el exponente impar la potencia es negativa
    - Si la base es positiva
      - La potencia siempre será positiva.
  - Para las raices
    - Si el indice es par
      - Y el radicando es positivo la raíz es positiva
    - Si el indice es impar
      - La raíz tiene el signo del radicando.
- **Realizar las multiplicaciones y divisiones.**
  - De acuerdo al orden que aparezcan.
- **Realizar las sumas y las restas que aparezcan.**
  - para sumar dos números con el mismo signo suma y conserva el signo, y si son de diferente signo resta y conserva el signo del número mayor en su valor absoluto

Elaborado por: Gabriela Veloz

1.2 EJEMPLOS RESUELTOS

EJEMPLO 1.2.1 $5 - 3\ x\ 2 + 4 - 4 : 2$
SOLUCIÓN Como **no hay paréntesis** aplicamos el orden de las operaciones: primero se resuelve las **multiplicaciones y divisiones** que aparezcan: $5 - 3\ x\ 2 + 4 - 4 : 2$ Luego de identificar, **resolver las operaciones**: $5 - 3\ x\ 2 + 4 - 4 : 2$ $5 - 6 + 4 - 2$ Sumar y restar para obtener la respuesta: $5 - 6 + 4 - 2 = 1$

Ejemplo 1.2.2

$(7+3) - (5 \times 2) + 5$

SOLUCIÓN:

Suprimir los signos de agrupación, para ello resolver primero las operaciones que hay dentro de ellos:

$$\underbrace{(7+3)}_{10} - \underbrace{(5 \times 2)}_{10} + 5$$

$$10 - 10 + 5$$

Sumar y restas. Por tanto, podemos operar de izquierda a derecha y resolvemos la expresión:

$$10 - 10 + 5 = 5$$

Ejemplo 1.2.3:

$3 \times (5 \times 3 + 6) - (5 + 12 : 4)$

Suprimir los paréntesis, para lo cual se debe resolver las operaciones que hay dentro de ellos. ¡Cuidado! Dentro de los paréntesis hay varias operaciones, por eso tenemos que fijarnos en hacer primero las **multiplicaciones y divisiones** dentro de los paréntesis:

$$3 \times (\underbrace{5 \times 3}_{15} + 6) - (5 + \underbrace{12 : 4}_{3})$$

$$3 \times (15 + 6) - (5 + 3)$$

Dentro de los paréntesis hay solo una operación podemos resolverlas:

$$3 \times (\underbrace{15 + 6}) - (\underbrace{5 + 3})$$

$$3 \times \quad 21 \quad - \quad 8$$

Resolver la **multiplicación**:

$$3 \times 21 - 8$$

Una vez resuelta la multiplicación podemos resolver la expresión:

$$63 - 8 = 55$$

(SÁNCHEZ, 2015)

Fuente: U. E. Capitán Edmundo Chiriboga
Elaborado por: Gabriela Veloz
Riobamba-Ecuador

1.3. ACTIVIDADES EN CLASE

1. Escriba el orden de las operaciones que debe seguir para resolver los problemas de operaciones combinadas.

   ◯ Suma y resta

   ◯ Multiplicación y División

   ◯ Potenciación

   ◯ Radicación

2. Una con una línea el orden que debe seguir para suprimir paréntesis.

3	Corchetes
2	Llaves
1	Paréntesis

3. Resuelva los siguientes ejercicios

EJERCICIO $3^2 - 2^3(2) + (4)3\text{-}8$
SOLUCIÓN:
EJERCICIO $[(17 - 15)^3 + (7 - 12)^2] : [(6 - 7) \cdot (12 - 23)]$
SOLUCIÓN:

1.4 EJERCICIOS PROPUESTOS

Fuente: Libro de matemática la lectura del muchacho

a) $26 + 3 \cdot 5 - 16 =$

b) $27 + 5 - 45 : 5 + 16 =$

c) $(2 \cdot 3 + 12)\,(6 - 4) =$

d) $3 \cdot 8 + (6 + 5 - 3) - 16 : 4 =$

e) $1 + 5 \cdot (2 \cdot 3)^{3} =$

f) $40 - [30 + 6\,(19 - 12)] =$

g) $5\{4\,[7 + 4\,(5 \cdot 3 - 9)] - 3\,(10 - 8)\} =$

h) $(2 - 8) + [5 - (-2)] =$

i) $6 - [6 - 2 - (1 - 8) - 3 + 6] + 5 =$

j) $12 : [6 : (-2)] =$

k) $[(-1)^5 - (-3)^{3}]^2 =$

l) $(5 + 18 \cdot 2 : 6 - 4) \cdot (4 : 2 - 3 + 6) : (7 - 8 : 2 - 2)^{2} =$

m) $[(15 - 15)^3 + (7 - 12)^2] : [(6 - 7) \cdot (12 - 23)] =$

Fuente: U. E. Capitán Edmundo Chiriboga
Riobamba-Ecuador
Elaborado por: Gabriela Veloz

1.5 EVALUACIÓN

1. **Dentro del circulo escriba v si es verdadero o f si es falso en las siguientes expresiones.**

○ **Cuando sumo dos números negativos la respuesta siempre es negativa.**

○ **Cuando un signo menos esta precedido de un paréntesis se debe cambiar de signo a todos los números que están dentro del paréntesis.**

○ **La potencia de un número negativo con exponente par siempre será positiva**

○ **La raíz de un número negativo cuando el índice es par es siempre negativa.**

2. **Una con una línea el orden de las operaciones que debe seguir para resolver los problemas de operaciones combinadas.**

3	**Suma y resta**
4	**Multiplicación y división**
2	**Potencia**
1	**Radicación**

3. **Resuelva el siguiente ejercicio**

EJERCICIO $4^2 - 2^3(1) + (7)3\text{-}9$
SOLUCIÓN:

Fuente: Elaborado por: Luisa Corayma y Ana Blanco

1.6. EJERCICIO DE APLICACIÓN DE LAS OPERACIONES ARITMÉTICAS EN LA FÍSICA

Ejercicio 1.5.1

Ejemplo 4.6 Esto es verdaderamente un arma. Pág. 82 del libro Serway cuarta edición. Desde la azotea de un edificio se lanza una piedra hacia arriba a un ángulo de 30 grados con respecto de la horizontal y con una velocidad inicial de 20 m/seg. Como muestra la figura 4.10. Si la altura del edificio es 45 m. ¿Cuánto tiempo permanece la pierda en vuelo?

SOLUCIÓN:

$$v_x = v_{0x} = v_0 \cos \theta$$

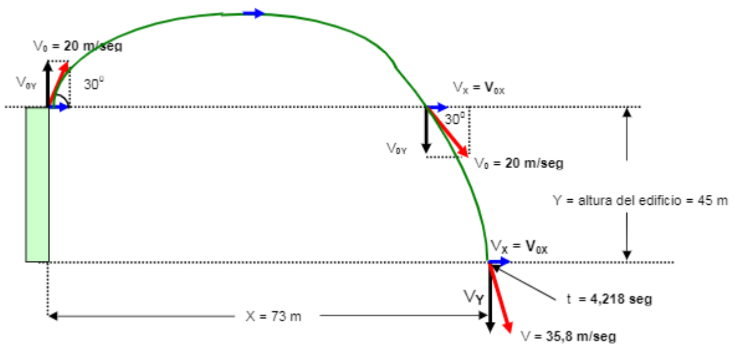
$$v_x = v_{0x} = 20 \text{ m/seg} * \cos 30$$

$$v_x = v_{0x} = 17{,}32 \text{ m/seg}$$

$$v_{0y} = v_0 \text{ sen } \theta v_{0y} = 20 \text{ m/seg} * \text{sen } 30 = 20 * 0{,}5 = 10 \text{ m/seg}$$

$$v_{0y} = 10 \text{ m/seg.}$$

$$v_x = v_{0x}$$



FUENTE: Pág. 82 del libro Serway cuarta edición

Es importante decir que el sitio donde se inicia el movimiento son las coordenadas (0,0), de esto se deduce lo que este hacia abajo es negativo y lo que este hacia arriba es positivo. Por lo anterior la altura del edificio Y = - 45 metros

$Y=V_{0Y}*t - \frac{g*t^2}{2}$

$-45=10*t - \frac{9,8*t^2}{2}$

$-45=10t - 4,9t^2$

Ordeno e igualo a cero la ecuación

$-4,9t^2 + 10t + 45=0$

Multiplico por -1

$4,9t^2 - 10t - 45=0$

Aplicar la formula general para determinar el tiempo.

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

APLICACIÓN DE OPERACIONES ARITMÉTICAS N.-1
$t = \frac{-10 \pm \sqrt{(10)^2 - 4(4,9)(-45)}}{2(4,9)}$ $t = \frac{-10 \pm \sqrt{100 + 882}}{9,8}$ $t = \frac{-10 \pm \sqrt{982}}{9,8}$ $\mathrm{t} = \frac{-10 \pm 31,33}{9,8}$ $\mathrm{t} = \frac{41,33}{9,8}$ **t=4,218s**

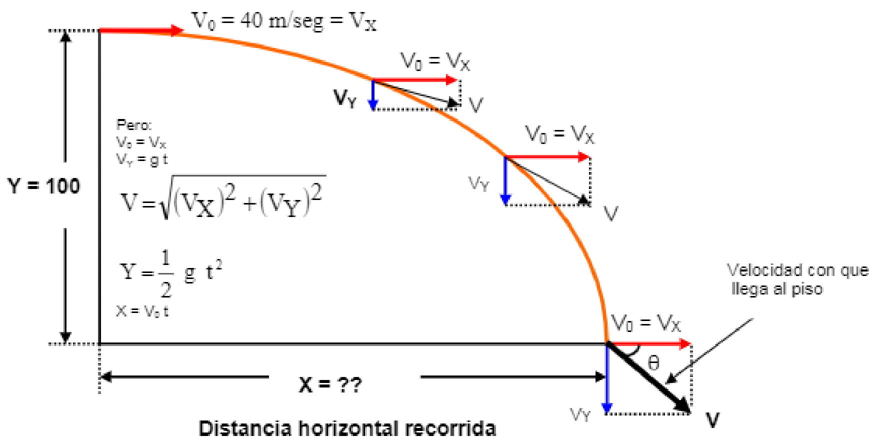
¿Cuál es la velocidad de la piedra justo antes de que golpee el suelo?

$\mathbf{V_Y = V_{0Y} - g * t}$ **LEY FÍSICA**
APLICACIÓN DE OPERACIONES ARITMETICAS N.-2
$V_Y = 10\frac{m}{s} - 9,8\frac{m^2}{s} * 4,21s$ $V_Y = 10\frac{m}{s} - 9,8\frac{m}{s^2} * 4,21s$ $V_Y = 10\frac{m}{s} - 41,33\frac{m}{s}$ $\mathbf{V_Y = -31,33\frac{m}{s}}$

Ejercicio 1.5.3

Ejemplo 4.7 Los exploradores extraviados. Pág. 82 del libro Serway cuarta edición. Un avión de rescate en Alaska deja caer un paquete de provisiones a un grupo de exploradores extraviados, como se muestra en la fig. 4.11. Si el avión viaja horizontalmente a 40 m/s. Y a una altura de 100 metros sobre el suelo. ¿Dónde cae el paquete en relación con el punto en que se soltó?

SOLUCIÓN



FUENTE: Pág. 82 del libro Serway cuarta edición.

¿Dónde cae el paquete en relación con el punto en que se soltó?

Determinar el t_{VUELO}

$$Y = \frac{1}{2} g\,t^2$$

$$2Y = g\,t^2$$

$$\frac{2\,Y}{g} = t^2$$

APLICACIÓN DE OPERACIONES ARITMÉTICAS N.- 1 EJERCICIO 2
$t_V= \sqrt{\frac{2Y}{g}} = \sqrt{\frac{2*100}{9,8}} = \sqrt{\frac{200}{9,8}} = \sqrt{20,4} = 4,51s$ $X = V_0 * t_{VUELO} = 40\frac{m}{s} * 4,51s = 180,4m$ 0 $V_Y = V_{0Y} + g*t$ $V_Y = g*t_{VUELO}$ $V_Y = 9,8\frac{m}{s^2} * 4,51s$ $V_Y = 44,19\frac{m}{s}$ La velocidad inicial en el eje x se mantiene constante $V_X = V_0 = 40\frac{m}{s}$

TEMA 2

ÁLGEBRA

FUENTE: Elaborado por imágenes animadas de profesores

DESTREZA CON CRITERIO DE DESEMPEÑO	CRITERIO DE EVALUACIÓN	VALOR
M.4.1.9. Aplicar las propiedades algebraicas (adición y multiplicación) de los números enteros en la suma de monomios homogéneos y la multiplicación de términos algebraicos. M.4.1.10 Resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita en Z en la solución de problemas. M.4.1.24. Operar con polinomios de grado ≤2 (adición y producto por escalar) en ejercicios numéricos y algebraicos. M.4.1.20. Resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita en Q en la solución de problemas sencillos. M.4.1.32. Calcular expresiones numéricas y algebraicas usando las operaciones básicas y las propiedades algebraicas en R. M.4.1.33. Reconocer y calcular productos notables e identificar factores de expresiones algebraicas. M.4.1.38. Resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita en R para resolver problemas sencillos.	**C**E.M.4.1. Emplea las relaciones de orden, las propiedades algebraicas (adición y multiplicación), las operaciones con distintos tipos de números (Z, Q, I) y expresiones algebraicas, para afrontar inecuaciones y ecuaciones con soluciones de diferentes campos numéricos, y resolver problemas de la vida real, seleccionando la forma de cálculo apropiada e interpretando y juzgando las soluciones obtenidas dentro del contexto del problema; analiza la necesidad del uso de la tecnología.	El respeto

Fuente: Currículo 2019 Ministerio de Educación
Elaborado por: Gabriela Veloz

2.1. OPERACIONES CON EXPRESIONES ALGEBRAICAS

2.1.1 Suma de polinomios

Para sumar dos polinomios se suman los coeficientes de los términos del mismo grado.

$P(x) = 2x^3 + 2x - 3$ $Q(x) = 4x - 3x^2 + 2x^3$

1. Ordenamos los polinomios, si no lo están.

$Q(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x$ $P(x) + Q(x) = (2x^3 + 2x - 3) + (2x^3 - 3x^2 + 4x)$

2. Agrupamos los monomios del mismo grado.

$P(x) + Q(x) = 2x^3 + 2x^3 - 3\ x^2 + 2x + 4x – 3$

3. Sumamos los monomios semejantes.

$P(x) + Q(x) = 2x^3 + 2x^3 - 3\ x^2 + 5x + 4x - 3$

$P(x) + Q(x) = x^3 + 6x$

2.1.2. Resta de polinomios

Para restar polinomios se debe sumar al minuendo el opuesto del sustraendo.

$P(x) - Q(x) = (2x^3 + 3x^2 - 3) - (2x^3 - 3x^2 + 4x)$

$P(x) - Q(x) = 2x^2 + 3x^2 - 3 - 2x^3 + 3x^2 - 4x$

$P(x) - Q(x) = 2x^3 - 2x^3 + 3x^2 + 3x^2 - 4x - 3$

$P(x) - Q(x) = 6x^2 -4x – 3$

2.1.3. Multiplicación de polinomios

. Multiplicación de un número por un polinomio Se debe multiplicar el número por todos los términos que están dentro del paréntesis.

Ejemplo: $2 \cdot (2x^3 - 3x^2 + 2x - 2) = 4x^3 - 6x^2 + 4x - 4$

2. Multiplicación de un monomio por un polinomio Se aplica la propiedad distributiva.

Ejemplo: $4x^2 \cdot (2x^3 - 3x^2 + 4x - 2) = 8x^5 - 12x^4 + 16x^3 - 8x^2$

3. Multiplicación de polinomios Se multiplica cada término del primer polinomio con todos los términos del segundo polinomio.

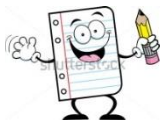
Ejemplo:

$P(x) = 2x^2 - 2 \qquad Q(x) = x^3 - 3x^2 + 4x$

$P(x) \cdot Q(x) = (2x^2 – 2x) \cdot (x^3 - 3x^2 + 4x)$

$P(x) \cdot Q(x) = 2x^5 - 6x^4 + 8x^3 - 2x^4 + 6x^3 - 8x^2$

$P(x) \cdot Q(x) = 2x^5 - 8x^4 + 14x^3 - 8x^2$



2.1.4 ACTIVIDAD EN CLASE

Fuente: U. E. Capitán Edmundo Chiriboga
Riobamba-Ecuador
Elaborado por: Gabriela Veloz

1. Realice las siguientes operaciones con polinomios

- **Sumar** $(2x^3 + x^2 - 5) + (x^2 + x + 6)$

- Restar $x^3 + 2x^2 - x - 4$ de $3x^3 - 5x^2 + 3$

- Multiplicar $(x + 2)(x - 3)$

2. Resuelva las siguientes multiplicaciones entre polinomios.

- ✓ **$(x-2)\ (x+2)$**

- ✓ **$(x^2 + 5x + 2)\ (3x^3 + 2x + 1)$**

2.2 FUNCIONES

Una función es una relación que existe entre dos variables, en la cual; a cada valor de la primera variable le corresponde un único valor de la segunda variable.

A la primera variable se le denomina variable independiente y se representa con la letra ***x.***

A la segunda variable se le denomina variable dependiente y se representa con la letra ***y***

Elementos de una función

Los elementos de una función *f* son:

- **Dominio**
  - Valores de la variable independiente (x)
- **Recorrido**
  - Valores de la variable dependiente (*y*)

2.2.1. Función lineal

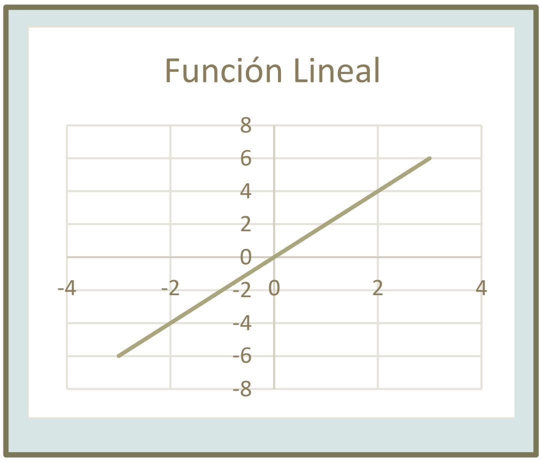
En algebra elemental

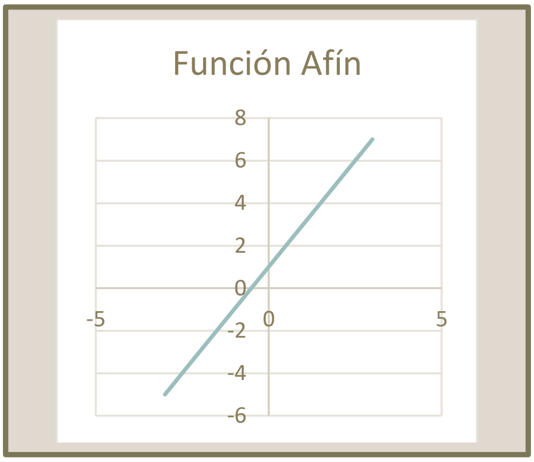
> Es una función polinómica de la forma *f(x)=mx+b*, su grafica es una línea recta.

En el contexto del análisis matemático:

> La función lineal es de la forma y=mx, donde b=0, que representa gráficamente a una línea recta que pasa por el origen.
>
> La función afín es de la forma y=mx+b, llamada también transformación lineal en el contexto del algebra lineal.

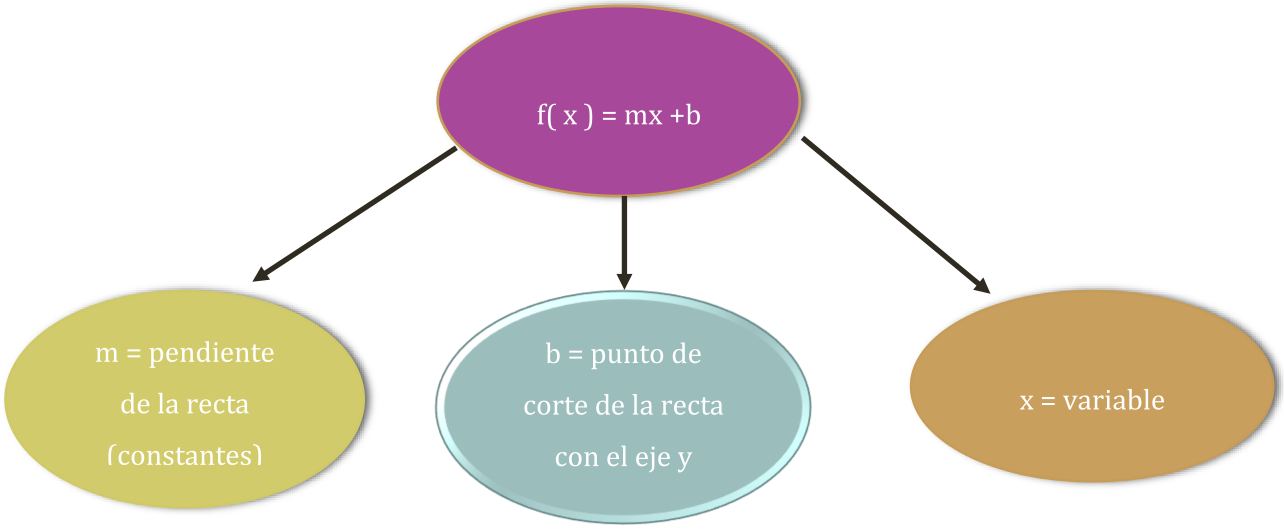
2.2.2. Gráfica de una función lineal y una función afín





Fuente: Elaborado por Gabriela Veloz

2.2.3. Significado de los términos la función lineal.



2.2.4. Evaluación de la función lineal

Para evaluar una función se debe determinar el valor de la variable dependiente, dado el valor de la variable independiente.

Ejemplo.2.2.4.1

Evaluar la función f (x) = 3x + 2 cuando el valor numérico de x es 3.

f (3) = 3(3)+2

f(3) =9+2

f (3) = 11

2.2.5. Pendiente de la recta

Para determinar la pendiente de la recta se debe tomar en cuenta lo siguiente:

- Cuando tenemos la función lineal de la pendiente es el valor de m.

Ejemplo 2.5.6.1

Determine la pendiente de la recta de que representa a la función:

$$f(x)=3x+6.$$

$$f(x)=mx+b$$

$$m=3$$

- Cuando se conoce dos puntos de la recta se debe aplicar la fórmula.

$$m=\frac{Y_2-Y_1}{X_2-X_1}$$

Ejemplo 2.5.6.2

Determine la pendiente de la recta que pasa por los puntos (-1,1) y (3,2).

Solución: Aplique la fórmula

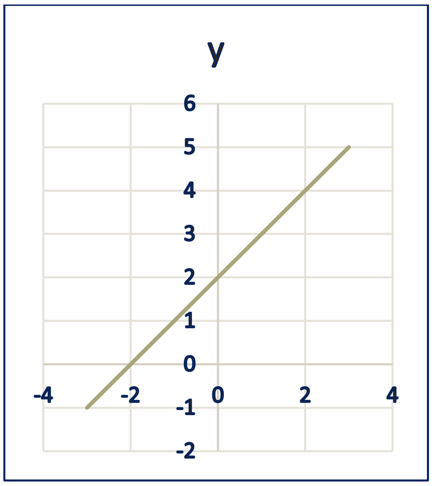
$$m=\frac{Y_2-Y_1}{X_2-X_1}$$

$$m=\frac{2-1}{3+1}$$

$$m=\frac{1}{4}$$

Ejemplo 2.5.6.3.

Observe la gráfica de la función y determine la pendiente de la recta.



Fuente: Elaborado por Gabriela Veloz

Solución:

a) Elegir dos puntos que pasan por la recta

(-2,0) y (2,4)

b) Aplicar la formula

$$m = \frac{Y_{2} - Y_{1}}{X_{2} - X_{1}}$$

$$m = \frac{4-0}{2+2}$$

$$m = \frac{4}{4}$$

$$m = 1$$

2.2.6. Las funciones con relación a la pendiente se pueden clasificar en tres tipos:

Funciones Lineales

- Creciente m>0
- Decreciente m<0
- Constante m = 0

2.2.7. Ecuación de la recta

La ecuación de la recta se puede determinar mediante la pendiente (m) y un punto de la recta, utilizamos la siguiente expresión:

$$\boxed{(y - y_1) = m(x - x_1)}$$

Ejemplo 2.2.7.1

Determinar la ecuación de la recta que tiene como pendiente m=2 y pasa por el punto (2,3).

Solución: Remplazar los datos en la expresión:

$(y - y_1) = m(x - x_1)$

$(y - 3) = 2(x - 2)$

$y = 2x - 4$

$y = 2x - 1$ Ecuación de la recta

Ejemplo 2.2.7.2

Determinar la ecuación de la recta que pasa por los puntos (2,5) y (4,9)

Solución:

Hallar la pendiente

$$m = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}$$

$$m = \frac{9-5}{4-2}$$

$$m = \frac{4}{2}$$

$$m = 2$$

Reemplazar los datos en: $(y - y_1) = m\,(x - x_1)$

$(y - 5) = 2(x - 2)$

$y = 2x - 4 + 5$

$y = 2x + 1$ Ecuación de la recta.

2.2.8. Rectas Paralelas y rectas perpendiculares.

Paralelas. - Dos rectas son paralelas si sus pendientes son iguales.

Ejemplo 2.2.8.1

Determine si las rectas son paralelas f(x) =2x+1; y=2x+3 .

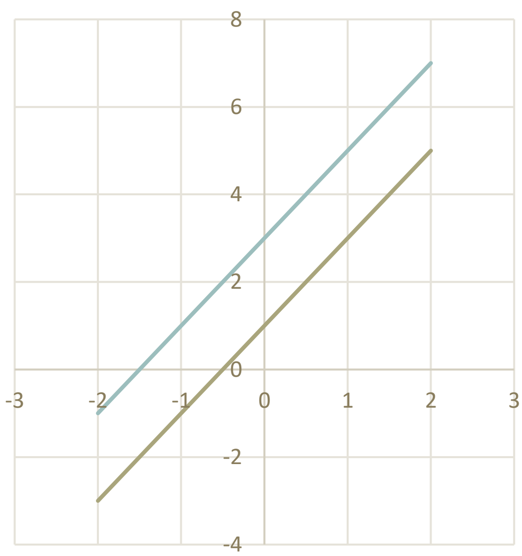
Solución:

f(x) =2x+1 y=2x+3

$m_1=2$ $m_2=2$

Como $m_1= m_2$ las 2 rectas son paralelas

Gráfica.



Fuente: Elaborado por Gabriela Veloz

Perpendiculares. -Dos rectas son perpendiculares si el producto de sus pendientes es igual a -1.

Ejemplo 2.2.8.2

Determine si las rectas son perpendiculares y=2x+1; y=-0,5x-7.

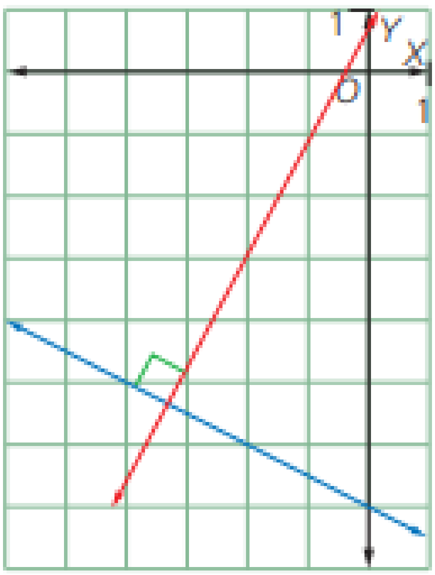
Solución. Multiplique las pendientes

$m_1 = 2 \quad m_2 = -0,5$

$m_1 . m_2 = -1$

2. (-0,5)=-1 Las dos rectas son perpendiculares.

Gráfica



Fuente: Libro del Ministerio de Educación de 10mo Grado

2.2.9. FUNCIÓN CUADRÁTICA

Definición

Es una función polinómica de la forma

$ax^2 + bx + c$

donde $a \neq 0$

Elementos

Eje de simetria

$x = \frac{-b}{a}$

Vértice

$\left(\frac{-b}{a}, \frac{-b^2 - 4ac}{2a}\right)$

Orientación

convexa si

$a > 0 \rightarrow$ U

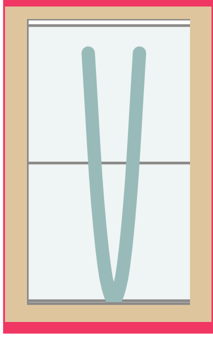
cóncava si

$a < 0 \rightarrow \cap$

Puntos de corte con los ejes OX, OY

GRÁFICA

Su gráfica representa una parábola



COEFICIENTES

Por sus coeficientes puede ser:

$y=ax^2$; b, c=0

$y=ax^2+c$; b=0

$y=ax^2+bx$; c=0

$y=ax^2+bx+c$; a, b, c≠0

Fuente: Elaborado por Gabriela Veloz

2.2.10. Evaluación de una función cuadrática

Para evaluar una función cuadrática se debe reemplazar el valor de x por un valor que pertenezca al dominio de la función.

Ejemplo 2.2.10.1

Evalúe la siguiente función $f(x)=2x^2+3x+4$ para los siguientes valores de x= 1,2,-3,-1

$f(x)=2x^2+3x+4$ x=1	Solución: $f(1)=2(1)^2+3(1)+4$ $f(1)=2(1)+3+4$ $f(1)=2+3+4$ $f(1)=9$

$f(x)=2x^2+3x+4$ $x=2$	Solución: $f(1)=2(2)^2+3(2)+4$ $f(1)=2(4)+6+4$ $f(1)=8+3+4$ $f(1)=15$
$f(x)=2x^2+3x+4$ $x=-3$	Solución: $f(1)=2(-3)^2+3(-3)+4$ $f(1)=2(9)-9+4$ $f(1)=18-9+4$ $f(1)=13$
$f(x)=2x^2+3x+4$ $x=-1$	Solución: $f(1)=2(-1)^2+3(-1)+4$ $f(1)=2(1)-3+4$ $f(1)=2-3+4$ $f(1)=3$

Fuente: Elaborado por Gabriela Veloz

2.2.11. Gráfica de una función cuadrática

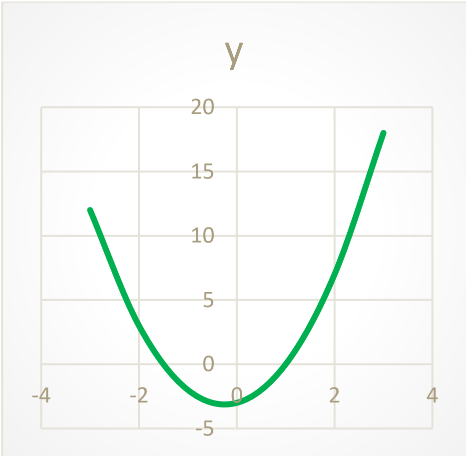
Para graficar una función cuadrática se debe realizar una tabla de valores.

Ejemplo 2.2.11.1

Graficar la siguiente función $g(x)=2x^2+x-3$

X	$y=g(x)=2x^2+x-3$	(x,y)
-2	$g(x)=2x^2+x-3= 2(-2)^2+(-2)-3=8-2-3=3$	(-2,3)
-1	$g(x)=2x^2+x-3= 2(-1)^2+(-1)-3=2-1-3=-2$	(-1,-2)
0	$g(x)=2x^2+x-3= 2(0)^2+(0)-3=0+0-3=-3$	(0,-3)
1	$g(x)=2x^2+x-3= 2(1)^2+(1)-3=2+1-3=0$	(1,0)
2	$g(x)=2x^2+x-3= 2(2)^2+(2)-3=8+2-3=7$	(2,7)

Gráfica.



Fuente: Elaborado por Gabriela Veloz

2.2.12. Raíces de una función cuadrática

Para determinar las raíces de una función cuadrática se debe factorizar el trinomio.

Ejemplo: $f(x) = x^2 - x - 6$:PROCESO

1.- Igualar a cero

$x^2 - x - 6 = 0$

2.- Factorizar

(x - 3) (x + 2)

3.- Igualar a cero cada factor

(x - 3) = 0 (x +2) = 0

4.- Despejar el valor de x en cada factor

(x - 3) = 0 (x +2) = 0

$x_1 = 3$ $x_2 = -2$

Ejemplo 2.2.12.1

Determinar las raíces de $f(x)=2x^2+8x+15$

Solución:

$f(x)=2x^2+9x+10$

$(2x+5)(x+2)$

$(2x+5)=0 \qquad (x+2)=0$

$x_1=-\frac{5}{2} \qquad x_2=-2$

2.2.13. ACTIVIDADES EN CLASE

1 Escriba en el espacio en blanco el tipo de función que corresponde.

*f (x) =2x+3   *g (x) =3x   * h(x) =$2x^2$+9x+10

2 Evalúe las siguientes funciones para x= -3 ; x= 5 ; x= 0

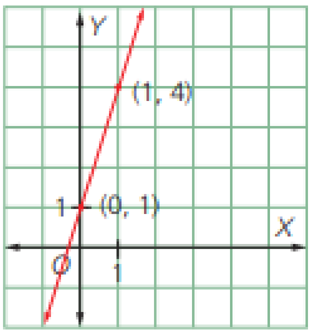
*f (x) =5x+2   *g (x) =2x   * h(x) =x^2+7x+10

3 Grafique las siguientes funciones:

- g(x)=x-2

- F(x)=$2x^2$ +5

4 Determine el valor de la pendiente de las siguientes funciones.

f(x)=2x+3	
Función que pasa por los puntos (1,2) y (4,4)	
	

5 Determine la ecuación de la recta que pasa por los puntos (0,1) y (1,4)

6 Determine las raíces de la siguiente funcione cuadrática:

$f(x)=4x^2+16x+15$

2.2.14. EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Realice la gráfica de las siguientes funciones:

$f(x) = 3x+2$

$f(x) = x^2 -5x+6$

2.-Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto P y tiene pendiente m en cada caso.

a. P(27, 4) y m = 4

b. P(21, 7) y m = 2

c. P(5, 6) y m = 5

d. P(2, 1) y m = 1

e. P(0, 1) y m = 3

3.- Evalúe las siguientes funciones para los valores de x=2; 3; -1

$f(x)= x+5$ $\quad$ $f(x)= x^2+2$

4.-Halla la pendiente y la ecuación de la recta que pasa por cada par de puntos.

a. (1, 25) y (22, 1)

b. (2, 14) y (21, 27)

c. (22, 22) y (0, 10)

d. (23, 5) y (24, 21)

e. (21, 0) y (0, 21)

f. (25, 3) y (4, 1)

5.- Indica, en cada caso, si las rectas dadas son paralelas o no. Justifica tus respuestas.

a. $y = 4x^2 - y$ $\quad$ $y = 4x + 3$

b. $y = -x - 1$ y $\quad$ $y = 2x- 3$

6.-Estudia la pendiente de la recta. Luego, indica si las rectas son perpendiculares o no.

$y = -\frac{3}{4}x+7$ y $\quad$ $y = -\frac{4}{3}x-1$

7.-Encuentra las rectas perpendiculares o paralela a la recta dada, según se indique.

a.-La ecuación de la recta perpendicular a $y = -3x + 5$ que pasa por el punto (2, 6).

b.-La ecuación de la recta paralela a la recta $x - 5y = 15$ que pasa por el punto (22, 5).

8.- Determine las raíces de las siguientes funciones.

- $2x^{2+} 9x+20$
- $x^2 +5x+6$

2.2.15 EVALUACIÓN

1.- Subraye la respuesta correcta:

El conjunto de valores de la variable independiente es:

- El dominio de la función
- El recorrido de la función
- La pendiente de la función

Una función es creciente si su pendiente es:

- Mayor que cero
- Menor que cero
- Igual a cero

La grafica de una ecuación cuadrática es:

- Una recta
- Una parábola
- No está definida

Dos rectas son paralelas si:

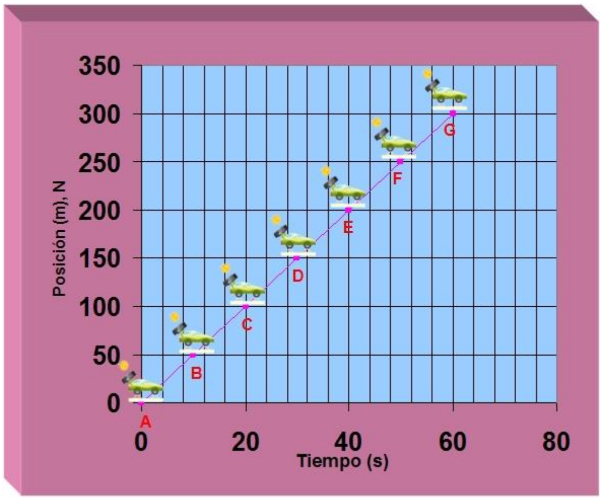
- Sus pendientes son iguales
- Si el producto de sus pendientes es igual a -1
- Si la pendiente es indeterminada.

2.- Resuelva

- Determine la pendiente de la recta que pasa por los puntos (2,4) y (-2,4)
- Determine la ecuación de la recta que tiene como pendiente m= 2 y pasa por el punto (-1,3)
- Grafique la siguiente función $x^2 +3$
- Determine las raíces de $f(x) = x^2 - x - 20$

2.2.16. Ejercicio de física con la aplicación de funciones, pendiente de la recta, ecuación de la recta.

Un auto se mueve con velocidad constante determine la gráfica de la posición vs el tiempo y explique.



Fuente: Elaborado por Khan Academy

Solución:

Se toma en cuenta que el Punto C indica la posición del objeto en un tiempo de 20 segundos. El punto B representa la posición del objeto en un tiempo de solo 10 segundos. Así que, el tiempo que le tomó al objeto desplazarse desde el punto B al C fue de 20s – 10s = 10s. Por otro lado, en el Punto C el objeto se encontraba a 100 m del origen de coordenadas y en el Punto B se encontraba a 50 m. Por lo tanto, la distancia entre los puntos B y C es de 100 m – 50 m = 50 m. Así que, podemos concluir que al objeto le tomó un tiempo de 10 s desplazarse del Punto B al C y que la distancia que recorrió al hacer esto fue de 50 m.
Análisis del movimiento Si se toma en cuenta el mismo análisis que el descrito arriba notarás que al moverse del punto C al D, el objeto recorrerá la misma distancia, 50 m, en el mismo tiempo, 10 s. Lo mismo ocurre al desplazarse del punto

D al E y del Punto E al F y del F al G. Como la distancia y el tiempo son los mismos en todos estos casos, decimos que el objeto se mueve con una rapidez constante o uniforme.

La ecuación de la pendiente

Si te fijas en la gráfica, todos los puntos, A hasta G, se encuentran en una línea recta. Las líneas rectas se caracterizan por que tienen una cantidad que es constante: su pendiente. Para aplicar la ecuación para calcular la pendiente se requiere analizar la gráfica. Para calcular la pendiente de la línea recta, tenemos que escoger dos puntos en la gráfica, digamos los puntos: A y C.

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} =$$
$$= \frac{100m - 0m}{20s - 0s} = \frac{100m}{20s} = 5m/s$$

Estos puntos tienen coordenadas:

$(x_1,y_1) = (0s,0m)$ y $(x_2, y_2) = (20s, 100m)$

Usemos la ecuación para el cálculo de la pendiente. Nota que el resultado es 5 m/s. Es decir, ¡la pendiente de la recta es la rapidez con que se mueve el objeto!

Podemos considerar que el eje de y representa la posición del objeto al norte. La pendiente de una gráfica de posición vs tiempo es la velocidad del objeto. Su velocidad es… 5m/s, al Norte. Como la pendiente es constante su velocidad es uniforme. Esto significa que posee la misma velocidad a través de todo el recorrido.

Cálculo de la pendiente

Entre C y D:	$\frac{150m-100m}{30s-20s}$	= 50 m/10 s	= 5 m/s
Entre D y E:	$\frac{200m-150m}{40s-30s}$	= 50 m/10 s	= 5 m/s
Entre E y F:	$\frac{250m-200m}{50s-40s}$	= 50 m/10 s	= 5 m/s
Entre F y G:	$\frac{300m-250m}{60s-50s}$	= 50 m/10 s	= 5 m/s

Al dividir la distancia que le toma al objeto entre el tiempo que le toma desplazarse en esa distancia verás algo interesante. Estarás calculando la pendiente. Por ejemplo, cuando el objeto se desplaza del punto B al C, tenemos: **distancia/tiempo = 50 m/10 s = 5 m/s**

Tabla de datos

La siguiente tabla de datos resume los resultados.

Tramo	Forma	Posición (m)	Tiempo (s)	Rapidez (m/s)	Velocidad (± m/s)
AB	Lineal Ascendente	Aumenta de 50 a 100	Aumenta de 10 a 20	5m/s	+5m/s, Norte
BC	Lineal Ascendente	Aumenta de 100 a 150	Aumenta de 20 a 30	5m/s	+5m/s, Norte
CD	Lineal Ascendente	Aumenta de 150 a 200	Aumenta de 30 a 40	5m/s	+5m/s, Norte
DE	Lineal Ascendente	Aumenta de 200 a 250	Aumenta de 40 a 50	5m/s	+5m/s, Norte
EF	Lineal Ascendente	Aumenta de 250 a 300	Aumenta de 50 a 60	5m/s	+5m/s, Norte

Fuente: Física en línea Dra. Elba M Sepúlveda, Ed.D

2.2.17. ECUACIONES

Definición de ecuación

Una ecuación es una igualdad que existe entre dos expresiones algebraicas, la cual nos permite encontrar el valor de la incógnita.

2.2.18. Pasos para resolver ecuaciones de primer grado.

Para resolver ecuaciones de primer grado se debe:

Agrupar los números de forma que a un lado queden los que tienen la incógnita "x", y al otro los que no la tienen. Ejemplo: 3x+1=4x+7, nos quedaría en este paso 3x-4x=7-1. Tome en cuenta que, para pasar de un miembro a otro con la operación contraria, es decir si en él un miembro está sumando pasará al otro restando y así sucesivamente.

Reduce términos semejantes y resuelve las operaciones indicadas en cada miembro de la ecuación.

3x-4x=7-1

7x = 6

Despeja la incógnita

$$x = \frac{6}{7}$$

2.2.19. Trucos Para Resolver Ecuaciones De Primer Grado.

Si un término se repite en ambos lados de la ecuación, se pueden eliminar. Por ejemplo: x+1-2x=4-2x+6. Aquí podríamos eliminar "3x" de ambos lados y seguir con la ecuación.

Si todos los números de la ecuación son negativos, se pueden eliminar. Ejemplo: -3x=-5 se convierte en 3x=5.

Si la incógnita es negativa, pase al otro lado de la ecuación para que sea positiva. Ejemplo: -2x=2, la cambiamos de lado y se queda 0=2+2x.

Si en una fracción hay un signo menos, se debe aplicar la ley de los signos y tendríamos el signo de la fracción.

2.2.20. Ecuaciones De Segundo Grado

DEFINICIÓN. -Tiene la forma $ax^2 + bx + c = 0$, siendo a, b y c números reales ($a \neq 0$), donde x toma el nombre de variable o incógnita, a y b se llaman coeficientes de las incógnitas y c recibe el nombre de término **independiente.**

2.2.21. Pasos Para Resolver Ecuaciones De Segundo Grado.

1.- Factorización simple

2.- Completando el cuadrado

3.- Formula cuadrática

2.2.22. Factorización Simple

¿Cómo resolver ecuaciones de segundo grado por factorización?

Se debe resolver como trinomios de la forma $x^2 + px + q$, cuando a = 1.

Ejemplo:

$x^2 + 2x - 15 = 0$

Buscamos dos números que multiplicados den -18 y sumados 3, y nos encontramos con que el 5 y el -3.

$(x + 5)\ (x - 3) = 0$

$x + 5 = 0$ despejando; $x = -5$ $x - 3 = 0$

Despejando; $x = 3$ Las soluciones son:

$x_1 = -6$ y $x_2 = 3$.

2.2.23. Fórmula Cuadrática.

¿Cómo resolver ecuaciones cuadráticas con la fórmula cuadrática?

La fórmula es la siguiente:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Simplemente sustituimos nuestros valores de a, b y c en la fórmula y obtendremos los valores de x.

EJEMPLO

$2(2x+1) = 10+20x+2x^2$

$4x+2=10+20x+2x^2$

Ubicamos los términos semejantes a un mismo miembro de la ecuación.

$4x+2-10-20x =$

$-16x-8= 2x^2$

Igualar a cero

$0= 2x^2 +16x+8$

$2x^2 +16x+8=0$

$a=2 \quad b=16 \quad c=8$

Aplicar la fórmula general

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-16 \pm \sqrt{16^2 - 4 * 2 * 8}}{2 * 2}$$

$$x = \frac{-16 \pm \sqrt{256 - 64}}{4}$$

$$x = \frac{-16 \pm 13{,}85}{4}$$

$x_1 = 0{,}54$

$x_2 = 7{,}46$

2.2.24. SISTEMA DE ECUACIONES

RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES

MÉTODO DE SUSTITUCIÓN

Se despeja una incógnita en una de las ecuaciones.

Se reemplaza la expresión de esta incógnita en la otra ecuación, consiguiendo una ecuación con una sola incógnita.

Se soluciona la ecuación.

El valor obtenido se sustituye en la ecuación en la que aparecía la incógnita despejada.

Los dos valores obtenidos constituyen la solución del sistema.

MÉTODO DE IGUALACIÓN

Se despeja la misma incógnita en ambas ecuaciones.

Se igualan las expresiones, con lo que obtenemos una ecuación con una incógnita.

Se resuelve la ecuación.

El valor obtenido se sustituye en cualquiera de las dos expresiones en las que aparecía despejada la otra incógnita.

Los dos valores obtenidos constituyen la solución del sistema.

MÉTODO DE REDUCCIÓN

- Se preparan las dos ecuaciones, multiplicándolas por los números que convenga.
- La restamos, y desaparece una de las incógnitas.
- Se resuelve la ecuación resultante.
- El valor obtenido se sustituye en una de las ecuaciones iniciales y se resuelve.
- Los dos valores obtenidos constituyen la solución del sistema.

METODO GRÁFICO

Se grafica cada una de las ecuaciones en un solo gráfico.

Si la grafica son dos rectas paralelas no hay solución

Si la grafica son dos rectas perpendiculares el pun to de intersección es la solución.

Si en la grafica la una recta coincide con la otra recta tiene infitas soluciones.

Fuente: Elaborado por Gabriela Veloz

Ejemplo 2.2.24.1

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 2x + 4y = 6 \end{cases}$$

Despejar la variable y en la ecuación 1

2x +y =1

y=1-2x

Reemplazar en la ecuación 2

2x +4(1-2x) =6

2x+4-8x=6

2x-8x=6-4

-6x=2

x = $\frac{2}{-6}$

x = $\frac{1}{-3}$

Reemplazamos el valor de x

y =1-2($\frac{1}{-3}$)

y =1-2($\frac{1}{-3}$)

y =1+ ($\frac{2}{3}$)

y=$\frac{5}{3}$

2.2.25. ACTIVIDAD EN CLASE N.-2

Fuente: U. E. Capitán Edmundo Chiriboga
Riobamba-Ecuador
Elaborado por: Gabriela Veloz

1. Resolver las siguientes ecuaciones

- $3x + 2 = 4 - (2 - 2x)$

SOLUCIÓN

- $\frac{2x}{3} + \frac{2x}{2} = \frac{1+2x}{2}$

SOLUCIÓN

2. Encuentra las soluciones de las siguientes ecuaciones.

• Solución

$x^2 + 2x + 2 = 0$

• Solución

x^2 -4x+4

3. Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones.

$$\begin{Bmatrix} x + 2y = 2 \\ x - 2y = 3 \end{Bmatrix}$$

2.2.26. Ejercicios Propuestos.

FUENTE: Elaborado por Soal Latihan Matematika

1. RESUELVA LAS SIGUIENTES ECUACIONES

a) 2x -6 =-3x

b) 12x-5x+5=3x-3x+6

c) 6x+2=4x+10

2. RESUELVA LOS SIGUIENTES SISTEMAS DE ECUACIONES

$$\begin{Bmatrix} 2x + y = 4 \\ 3x - y = 1 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} 2x + 2y = 4 \\ 3x - y = 1 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} 4x + 4y = 4 \\ 2x - y = 8 \end{Bmatrix}$$

2.2.27. EVALUACIÓN

FUENTE: Elaborado por Soal Latihan Matematika

a) RESUELVA LAS SIGUIENTES ECUACIONES Y SUBRAYE LA RESPUESTA CORRECTA

a) 2x -5 =-3x

- 1
- -1
- 3
- Ninguna

b) -12x-5x+7=-4x-3x+2

- 2
- -2
- 4
- Ninguna

b) RESUELVA EL SIGUIENTE SISTEMA DE ECUACIONES UTILIZANDO EL MÉTODO DE SUSTITUCIÓN Y COMPRUBE SI LOS VALORES DE LAS VARIABLES SON CORRECTOS.

Valores de las variables: x= 0 ; y=1

$$\begin{Bmatrix} -3x+4y=4 \\ 3x-y=-1 \end{Bmatrix}$$

2.2.28. Ejercicios De Física Con La Aplicación De Resolución De Ecuaciones

Ejemplo 4.5 Donde pone el ojo pone la bala. Pág. 81 del libro Serway cuarta edición. En una conferencia demostrativa muy popular, un proyectil se dispara contra un blanco de tal manera que el primero sale del rifle al mismo tiempo que el blanco se deja caer en reposo, como muestra la figura 4.9. Se demostrará que si el rifle esta inicialmente dirigido hacia el blanco estacionario, aun así, el proyectil hará diana.

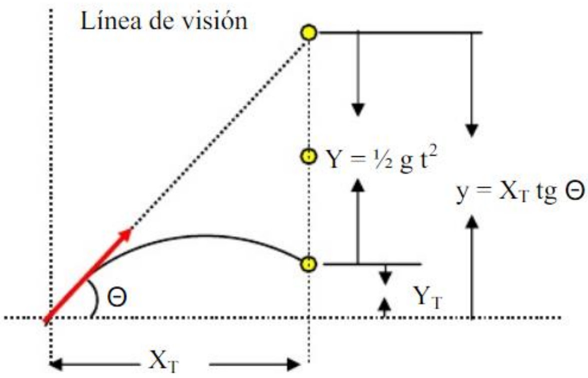


FIGURA 4.9

FUENTE: Pág. 81 del libro Serway cuarta edición

FIGURA 4.9 Razonamiento y solución

Se puede argumentar que el choque resultara bajo las condiciones establecidas observando que tanto el proyectil como el blanco experimentan la misma aceleración $a_Y = -g$ tan pronto como se liberan. Primero observe en la figura 4.9 que la coordenada y inicial del blanco es $X_T tg\Theta$ y que disminuye a lo largo de una distancia=$\frac{1}{2}$ g t^2 en un tiempo t.

En consecuencia, la coordenada y del blanco como una función del tiempo es, según la ecuación 4.14.

$y = X_T \tan\theta$

Pero $Y = \frac{1}{2} g t^2$

reemplazamos en

$y = X_T \tan\theta = Y_T + Y$

$X_T \tan\theta - \frac{1}{2} g y^2 = Y_T$

Si después de esto se escriben las ecuaciones para **x** y **y** correspondientes a la trayectoria del proyectil a lo largo del tiempo, utilizando las ecuaciones 4.12 y 4.13 en forma simultánea, se obtiene

$Y = V_{0Y} * t - \frac{1}{2} g t^2$

$Y = V_0 \text{ sen } \theta \text{ t} - \frac{1}{2} g t^2$

$t = \frac{X}{V0 \cos\theta}$

$Y_p = V_0 \text{ sen}\theta * t - \frac{1}{2} g t^2$

Reemplazamos t

APLICACIÓN DE RESOLUCIÓN DE ECUACIONES N.- 1

$Y_p = V_0 \text{ sen}\theta \left(\frac{X}{V0 \cos\theta}\right) - \frac{1}{2} g t^2$

$Y_p = \text{sen}\theta \left(\frac{X}{\cos\theta}\right) - \frac{1}{2} g t^2$

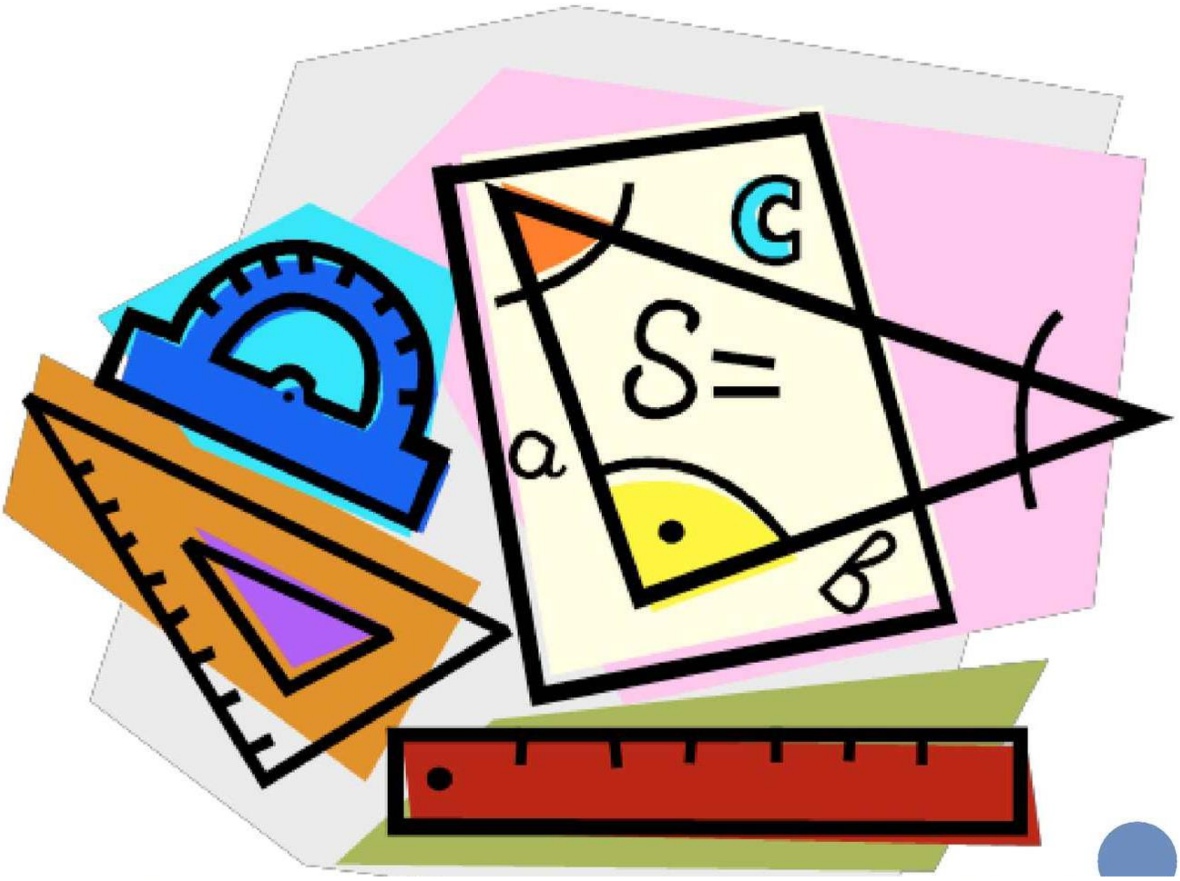
$Y_p = \tan\theta - \frac{1}{2} g t^2$

$x_p = x_t = Y_p = Y_T$ Se produce el choque

TEMA 3

TRIGONOMETRÍA Y GEOMETRÍA

Fuente: U. E. Capitán Edmundo Chiriboga Riobamba-Ecuador
Elaborado por: Gabriela Veloz



Fuente: Elaborado por María Del Pilar Cruz López

DESTREZA CON CRITERIO DE DESEMPEÑO	CRITERIO DE EVALUACIÓN	VALOR
M.4.2.15. Aplicar el teorema de Pitágoras en la resolución de triángulos rectángulos. M.4.2.16. Definir e identificar las relaciones trigonométricas en el triángulo rectángulo (seno, coseno, tangente) para resolver numéricamente triángulos rectángulos. M.4.2.17. Resolver y plantear problemas que involucren triángulos rectángulos en contextos reales, e interpretar y juzgar la validez de las soluciones obtenidas dentro del contexto del problema.	CE.M.4.6. Utiliza estrategias de descomposición en triángulos en el cálculo de áreas de figuras compuestas, y en el cálculo de cuerpos compuestos; aplica el teorema de Pitágoras y las relaciones trigonométricas para el cálculo de longitudes desconocidas de elementos de polígonos o cuerpos geométricos, como requerimiento previo a calcular áreas de polígonos regulares, y áreas y volúmenes de cuerpos, en contextos geométricos o en situaciones reales. Valora el trabajo en equipo con una actitud flexible, abierta y crítica.	Responsabilidad

Fuente: Currículo 2019 del Ministerio de Educación
Elaborado por. Gabriela Veloz

3.1 ÁNGULOS

Es la parte del plano determinada por dos semirrectas llamadas lados que se cortan en un punto de origen llamado vértice del ángulo.

TIPOS DE ÁNGULOS

<90°	Ángulo agudo
>90°	Ángulo obtuso
=90°	Ángulo recto
=180°	Ángulo llano
1+2=90°	Ángulo Complementario
1+2=180°	Ángulo suplementario

3.2. CONVERSIÓN DE MEDIDAS DE ÁNGULOS

Para realizar la conversión de grados a radianes y de radianes a grados realizamos lo siguiente:

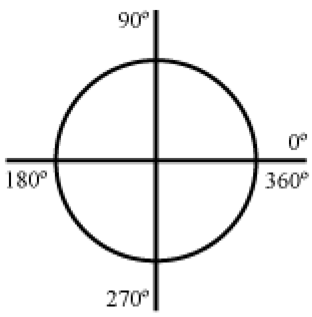
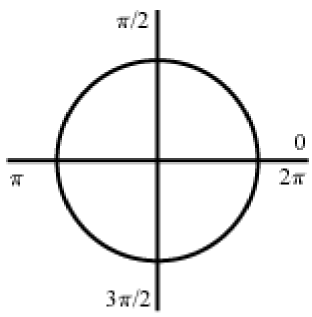
1) Para transformar de grados a radianes, se multiplica por Π y se divide entre 180º; y se simplifica. Es decir:

$$rad = grados \cdot \pi 180^{\circ} rad = grados \cdot \pi 180^{\circ}$$

2) Para transformar de radianes a grados, se multiplica por 180º y se divide entre Π; y se simplifica. Es decir:

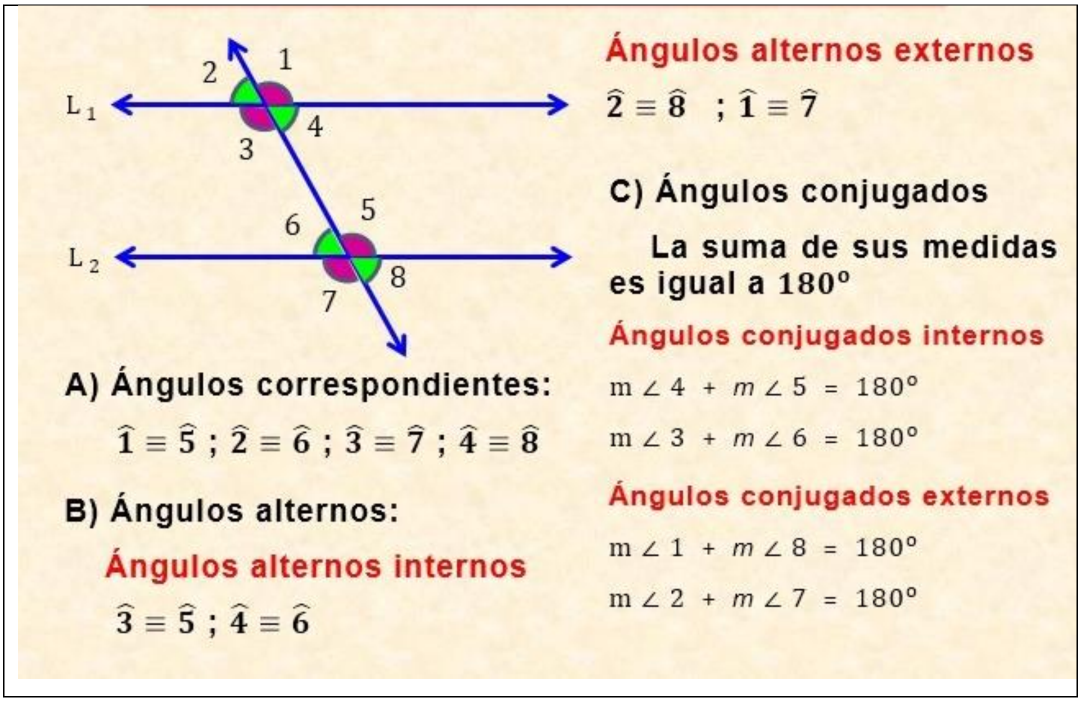
$$grados = rad \cdot 180^{\circ} \pi grados = rad \cdot 180^{\circ} \pi$$

3.3. Equivalencias entre grados sexagesimales y radianes

Grados	Radianes
	

FUENTE: Elaborado por Gabriela Veloz

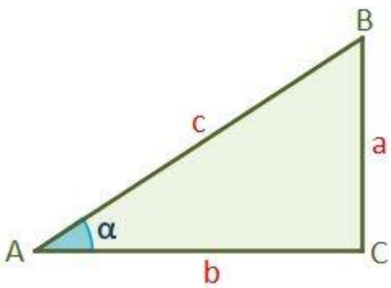
3.4. TEOREMAS DE ÁNGULOS



Fuente: Libro de Geometría de Euclides

3.5. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Las **funciones trigonométricas** de un ángulo α son las razones obtenidas entre los catetos y la hipotenusa de un triángulo rectángulo. Es decir, la igualación por su cociente de sus 2 catetos y la hipotenusa a, b y c.



Sea α uno de los ángulos agudos del triángulo rectángulo.

El **seno** de un **ángulo α** es la **razón** entre el cateto opuesto (a) y la hipotenusa (c).

$$\text{sen } \propto = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} = \frac{a}{c}$$

El **coseno** es la **razón** entre el cateto contiguo o cateto adyacente (b) y la hipotenusa (c).

$$\cos \propto = \frac{cateto\ adyasente}{hipotenusa} = \frac{b}{c}$$

La **tangente** es el cociente entre el cateto opuesto (a) y el cateto adyacente (b).

$$\cos \propto = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyasente} = \frac{a}{b}$$

3.6. Funciones Trigonométricas de Ángulos Característicos.

El **seno**, **coseno** y **tangente** de los **ángulos** de 0º, 30º, 45º, 60º, 90º, 180º y 270º) son:

TABLA DE ANGULOS NOTABLES							
RADIANES	GRADOS	SENO	COSENO	TANGENTE	COTANGENTE	SECANTE	COSECANTE
0	0°	0	1	0	Indefinido	1	Indefinido
$\frac{\pi}{6}$	30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$2\frac{\sqrt{3}}{3}$	2
$\frac{\pi}{4}$	45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$2\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{2}$	90°	1	0	Indefinido	0	Indefinido	1
π	180°	0	-1	0	Indefinido	-1	Indefinido
$\frac{3}{2}\pi$	270°	-1	0	Indefinido	0	Indefinido	-1
2π	360°	0	1	0	Indefinido	1	Indefinido

Fuente: Elaborado por Martín Marbello

3.7. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Resolver un triángulo rectángulo es determinar el valor de los lados y el valor de los ángulos.

3.8. Pasos Para Resolver Un Triángulo Rectángulo Cuando Se Conoce El Valor De Un Lado Y Un Ángulo.

Para resolver un triángulo rectángulo se recomienda seguir los siguientes pasos:

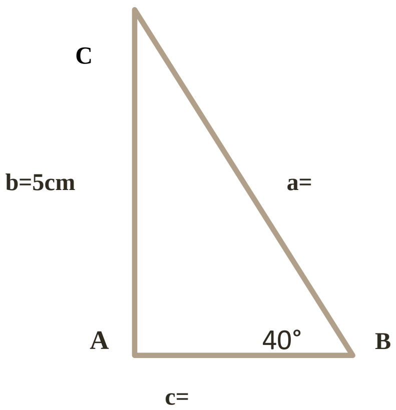
- ❖ Se debe utilizar una función trigonométrica que contenga el lado conocido y un lado desconocido.

- ❖ Despejar el lado desconocido.

- ❖ Una vez hallado el valor del lado, se puede utilizar Pitágoras para determinar el otro lado del triángulo.

- ❖ Utilice cualquier función trigonométrica para determinar el otro ángulo, o aplique el teorema "la suma de los ángulos internos es igual a 180" y determine el otro ángulo.

EJEMPLO Resolver el siguiente triángulo rectángulo



a) Aplicar la función seno

$$sen40° = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} = \frac{b}{a} sen40° = \frac{5cm}{a}$$

$$sen40°\,.\,a = 5cm$$

$$a = \frac{5cm}{sen\ 40°}$$

$$a = \frac{5cm}{0,6428}$$

$$a = 7,78cm$$

b) Aplicar el teorema de Pitágoras y despejamos el lado desconocido.

$a^2 = b^2 + c^2$

$c^2 = a^2 - b^2$

$c^2 = (7,78cm)^2 - (5cm)^2$

$c^2 = 60,53cm^2 - 25cm^2$

$c^2 = 35,53cm^2$

$$c = \sqrt{35,53}cm$$

$c = 5,96$

c) Aplicamos el teorema de la suma interna de los ángulos.

A+B+C=180°C=180°-90°-40°

C°=50°

3.9. Pasos Para Resolver Un Triángulo Rectángulo Cuando Se Conoce 2 Lados.

Tiene dos opciones:

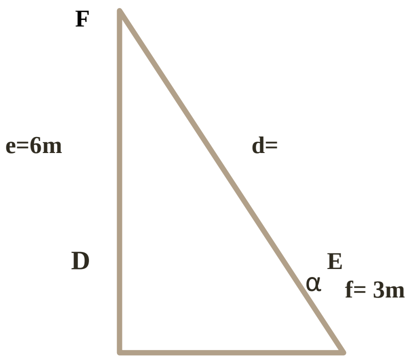
1.1. Aplicar el teorema de Pitágoras

1.2. Aplicar una función trigonométrica para determinar el valor del ángulo.

- Si eligió la opción 1.1 encontró el valor de un lado, entonces debe utilizar las funciones trigonométricas para determinar el valor de los ángulos.

- Si eligió la opción 1.2 encontró el valor del ángulo, entonces debe utilizar las funciones trigonométricas para determinar del lado y de los ángulos.

Ejemplo: Resolver el siguiente triángulo rectángulo.



a) Utilizar el teorema de Pitágoras para determinar el valor de la hipotenusa.

$d^2 = e^2 + f^2$

$d^2 = (6m)^2 + (3m)^2$

$d^2 = 36m^2 + 9m^2$

$d^2 = 45m^2$

$$d = \sqrt{45}m$$

d = 6,7m

b) Utilizar seno para determinar el ángulo α

$$sen\alpha = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} = \frac{e}{d}$$

$$sen\alpha = \frac{6m}{6{,}7m}$$

$$sen\alpha = 0{,}8955$$

$$\alpha = \text{sen}^{-1}\, 0{,}8955$$

$$\alpha = 64°$$

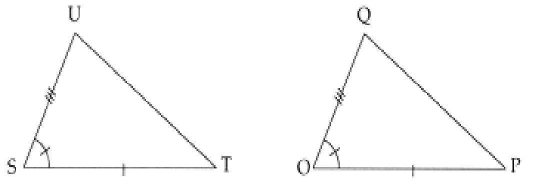
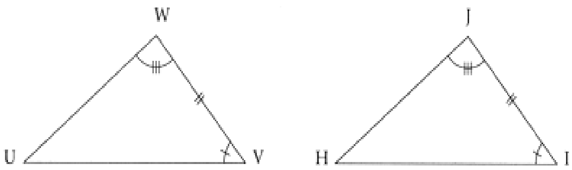
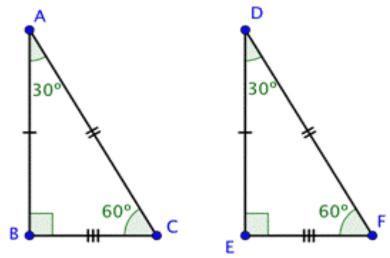
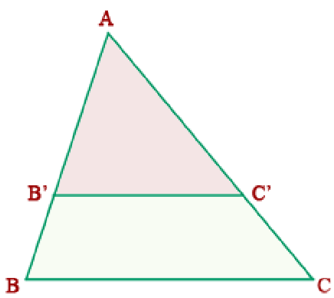
c) Aplicar el teorema de la suma interna de los ángulos.

D+E+F=180°

F=180°-90°-64°

F=26°.

3.10. TEOREMAS DE TRIÁNGULOS

Si dos lados y el ángulo comprendido entre ellos en un triángulo son congruentes, respectivamente, a dos lados y el ángulo comprendido entre ellos en otro triángulo, entonces los triángulos son congruentes	 $\triangle STU \cong \triangle OPQ$ en virtud de que: $\overline{SU} \cong \overline{OQ}$; $\sphericalangle S \cong \sphericalangle O$., $\overline{ST} \cong \overline{OP}$
* Si un lado y sus dos ángulos adyacentes en un triángulo son congruentes, respectivamente, a un lado y sus ángulos adyacentes en otro triángulo, entonces los triángulos son congruentes.	 $\triangle UVW \cong \triangle HIJ$ en virtud de que: $\sphericalangle V \cong \sphericalangle I$; $\overline{VW} \cong \overline{IJ}$., $\sphericalangle W \cong \sphericalangle J$
Si tres lados de un triángulo son congruentes, respectivamente, a tres lados de otro triángulo, entonces los triángulos son congruentes	
Teorema de Thales. En un triángulo podemos ver que toda paralela a un lado de un triángulo determina dos triángulos semejantes entre sí, ya que sus lados son proporcionales y sus ángulos son iguales.	

Fuente: Elaborado por Gabriela Veloz

3.11 ACTIVIDAD EN CLASE

Fuente: U. E. Capitán Edmundo Chiriboga

1) Expresa en radianes los siguientes ángulos dados en grados:

   90º 120º 135º 150º

2) Expresa en grados los siguientes ángulos dados en radianes:

   $\frac{3\pi}{4}$ $\frac{5\pi}{2}$ $\frac{13\pi}{5}$

3) Reduce al primer giro los siguientes ángulos:

   a) 6π radianes

   b) -5π radianes

4) Pasar de grados, minutos y segundos a grados decimales.

   a) 22° 18’ 30”

   b) 2° 18’ 30”

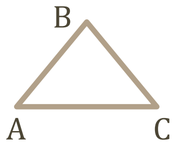
5) Dado los ángulos α y β hallar $\alpha + \beta$, $\alpha - \beta$, 2α, $\beta/5$, el complementario de α y el suplementario de β:

   a) α=12° 18’ 30”

   b) β=45° 18’ 32”

6) Hallar la medida en radianes de un ángulo central contenido por un arco de 35 cm en una circunferencia de radio 5 cm.

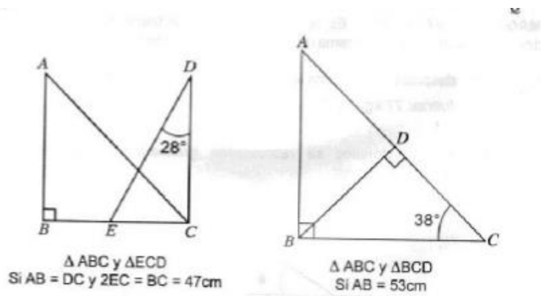
7) Demuestra que, en un triángulo isósceles, los ángulos de la base son iguales.



8) De un triángulo rectángulo ABC, se conocen b = 33 m y c = 21 m. Resolver el triángulo.

9) De un triángulo rectángulo ABC, se conocen a = 45 m y B = 22°. Resolver el triángulo

10) Resolver los siguientes triángulos rectángulos.



Fuente: Física de Vallejo Zambrano tomo 1

11) Hallar el radio de una circunferencia sabiendo que una cuerda de 24.6 m tiene como arco correspondiente uno de 70°.

Fuente: U. E. Capitán Edmundo Chiriboga
Riobamba-Ecuador
Elaborado por: Gabriela Veloz

3.12. EVALUACIÓN.

1) Expresa en radianes los siguientes ángulos dados en grados:

90º

120º

2) Expresa en grados los siguientes ángulos dados en radianes:

$$\frac{3\pi}{4}$$

$$\frac{13\pi}{5}$$

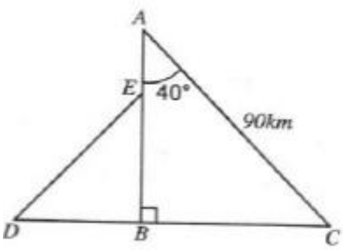
3) Pasar de grados, minutos y segundos a grados decimales.

a) 22° 18’ 30”

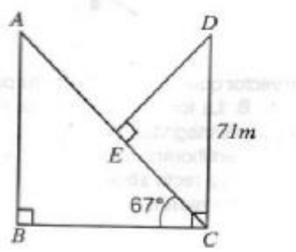
b) 2° 18’ 30”

4) Hallar la medida en radianes de un ángulo central contenido por un arco de 35 cm en una circunferencia de radio 5 c.

5) Resolver los siguientes triángulos rectángulos.



ΔABC y ΔEDB
Si $EB = \frac{2}{3} AB = DB$

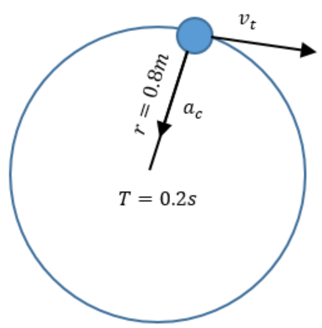


ΔABC y ΔEDC
Si $EC = \frac{AC}{5}$

Fuente: Física de Vallejo-Zambrano tomo 1

3,13. EJERCICIO DE FÍSICA EN EL BLOQUE CURRICULAR MOVIMIENTO EN DOS DIMENSIONES CON LA APLICACIÓN DE LA TRIGONOMETRÍA.

Ejercicio 3.5.1. (Julián, 2017) Al realizar un Movimiento Circular Uniformemente Acelerado un objeto describe un radio de 0.8 m y efectúa una vuelta completa en 0.2 segundos para este instante, calcular: a) velocidad angular, b) velocidad tangencial, c) aceleración tangencial, d) aceleración centrípeta, e) aceleración resultante.



Fuente: Libro de Física de Julián 2017

Solución: Vamos a utilizar las fórmulas expuestas en cada definición, así que prestar mucha atención. Porque será de gran relevancia.

Datos:

r = 0.8 m

T = 0.2 s

a) **Calculando la Velocidad Angular**

Para calcular la velocidad angular, podemos usar la siguiente fórmula, que relaciona solamente al periodo.

$$w = \frac{2\pi}{T} = \frac{2(3{,}1416)\text{rad}}{0{,}2s} = 31{,}42\frac{rad}{s}$$

a) **Calculando la velocidad tangencial**

Para poder obtener la velocidad tangencial, aplicamos la fórmula y sustituimos los datos.

$$w = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2(3{,}1416)(0{,}8)}{0{,}2s} = 25{,}13\frac{m}{s}$$

b) **Calculando la aceleración tangencial**

Para obtener la aceleración tangencial, necesitamos saber la aceleración angular, para ello aplicamos la fórmula:

$$\alpha = \frac{w}{t} = \frac{31.42\frac{rad}{s}}{0{,}2s} = 157{,}1\frac{rad}{s^2}$$

Ahora si aplicamos la fórmula de la aceleración tangencial.

$$a_t = \alpha r = (157{,}1\frac{rad}{s^2})(0.8m) = 125{,}68\frac{m}{s^2}$$

c) **Calculando la aceleración centrípeta.**

Para obtener la aceleración centrípeta, aplicamos la siguiente fórmula y sustituimos datos:

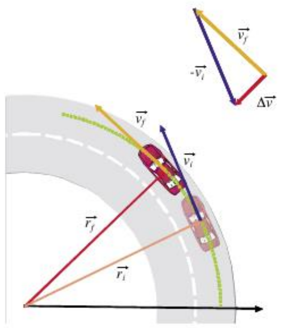
$$a_c = \frac{vs^2}{r} = \frac{(25{,}13\frac{m}{s})^2}{0{,}8m} = 789{,}4\frac{m}{s^2}$$

d) **Calculando la velocidad resultante**

Aplicamos la siguiente fórmula:

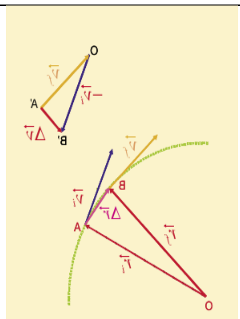
$$a_R = \sqrt{a_c^2 + a_t^2} = \sqrt{\left(789.4\frac{m}{s^2}\right)^2 + \left(125.68\frac{m}{s^2}\right)^2} = 799.34\frac{m}{s^2}$$

- Observa la siguiente gráfica y determina la aceleración centrípeta.



Solución:

Si se considera el cambio de velocidad, $\mathbf{\Delta v = v\ f - v_i}$, que experimenta un móvil en un pequeño intervalo de tiempo $\mathbf{\Delta t}$, se ve que $\mathbf{\Delta v}$ es radial y está dirigido hacia el centro curvatura. La aceleración, por lo tanto, también tiene esa dirección y sentido, y por eso se denomina aceleración centrípeta.



3.14. EJERCICIOS PROPUESTOS

Fuente: U. E. Capitán Edmundo Chiriboga
Riobamba-Ecuador
Elaborado por: Gabriela Veloz

1) Expresa en radianes los siguientes ángulos dados en grados:

180º 210º 225º 240º

270º 300º 315º 330º

2) Expresa las siguientes medidas de ángulos en grados o radianes, según proceda:

a. 20°
b. 120°
c. 9,8 rad
d. 5π rad

3) Reduce al primer giro los siguientes ángulos:

700°

1620°

4) Reduce al primer giro los siguientes ángulos:

4π radianes

23 radianes

5) Expresar en radianes los siguientes ángulos:

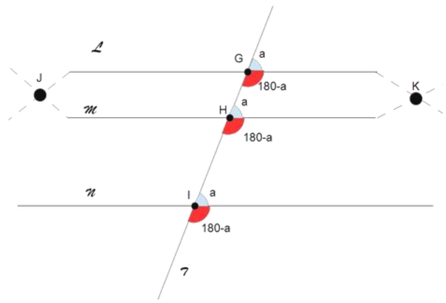
170°45´

3°4´9”

6) Dado los ángulos α y β hallar α + β, α - β, 2α, β/5, el complementario de α y el suplementario de β:

β=40°

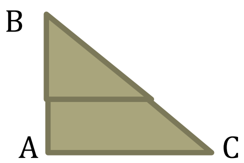
7) Indicar cuales son los ángulos iguales y explicar porque.



8) Resolver los siguientes triángulos rectángulos

- De un triángulo rectángulo ABC, se conocen b = 5.2 m y B = 37º. Resolver el triángulo.

9) Demuestre que los dos triángulos son semejantes.



TEMA 4

EJERCICIOS PROPUESTOS DE APLICACIÓN DE LOS FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS BÁSICOS EN FÍSICA (MOVIMIENTO EN DOS DIMENSIONES)

4.1 EJERCICIOS PROPUESTOS DE APLICACIÓN DE LAS OPERACIONES ARITMÉTICAS EN FÍSICA (MOVIMIENTO EN DOS DIMENSIONES)

Ejercicio 4.1.1. Problema 4.11 Edición cuarta SERWAY En un bar local, un cliente hace deslizar un tarro vacío de cerveza sobre la barra para que vuelva a llenarlo. El cantinero esta momentáneamente distraído, y no ve el tarro, el cual cae de la barra y golpea el piso a 1,4 metros de la misma.
Si la altura de la barra es de 0.86 metros.

Determinar

¿Con qué velocidad abandono el tarro de la barra?
¿Cuál fue la dirección de la velocidad del tarro justo antes de chocar con el piso?

Ejercicio 4.1.2. Problema 4.2 El salto de longitud. Edición cuarta SERWAY Un atleta de salto de longitud deja el piso a un ángulo de 20° respecto a la horizontal y a una rapidez de 11m/s a) ¿Hasta dónde salta? (suponga que el movimiento del atleta es equivalente al de una partícula.)

Ejercicio 4.1.3. Problema 4.0 Edición cuarta SERWAY. Un avión de rescate de Alaska deja caer un paquete de raciones de emergencia a un grupo de exploradores atrapados, como se muestra en la figura 4.11. Si el avión viaja a 40m/s. Se le deja caer un paquete a un observador en la Tierra desde el avión de rescate, el cual sigue la trayectoria que se observa. horizontalmente a 40 m/s a una altura de 100 m arriba del suelo, ¿a qué distancia caerá el paquete respecto al punto donde se soltó?

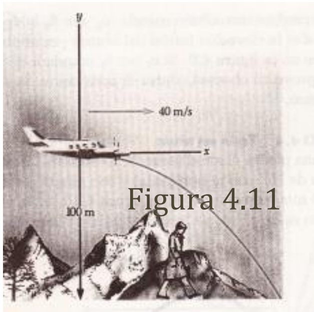


Figura 4.11

Ejercicio 4.1.4. Problema 20 (Educación, 2018) Un proyectil es lanzado desde lo alto de un acantilado de 150 m de altura con una velocidad inicial de 400 m/s y con un ángulo de inclinación de 30°.Determina: a. Las componentes de la velocidad inicial; b. El tiempo que tarda en caer al suelo; c. El alcance; d. La altura máxima.

Ejercicio 4.1.5. Problema 21. (Educación, 2018) Una barca pretende cruzar un río con una velocidad de 12 m/s perpendicular a la corriente. La velocidad de la corriente es de 10 m/s. Calcula: a. El tiempo que tarda la barca en atravesar el río si éste tiene una anchura de 150 m; b. La distancia que recorre la barca.

Ejercicio 4.1.6. Problema 22. (Educación, 2018) Un futbolista patea hacia el arco con una velocidad de 15 m/s. Calcula: a. el alcance para un ángulo de tiro de 30°, 45° y 60°; b. el tiempo que el balón permanece en el aire en cada uno de los supuestos anteriores.

Ejemplo 4.1.7. Problema 3.6 (Young, Hugh D. y Roger A. Freedman, 2009) Un bateador golpea una pelota de béisbol de modo que ésta sale del bate a una rapidez v_0 = 37.0 m/s con un ángulo α_0 = 53.1°, en un lugar donde g = 9.80 m/s^2 . a) Calcule la posición de la pelota y la magnitud y dirección de su velocidad cuando t = 2.00 s.

b) Determine cuándo la pelota alcanza el punto más alto y su altura h en ese punto. c) Obtenga el alcance horizontal R, es decir, la distancia horizontal desde el punto de partida hasta donde la pelota cae al suelo.

Ejemplo 4.1.8. Problema 3.9 (Young, Hugh D. y Roger A. Freedman, 2009) Usted lanza una pelota desde su ventana a 8.0 m del suelo. Cuando la pelota sale de su mano, se mueve a 10.0 m/s con un ángulo de 20° debajo de la horizontal. ¿A qué distancia horizontal de su ventana la pelota llegará al piso? Desprecie la resistencia del aire.

Ejemplo 4.1.9. Problema 3.10. (Young, Hugh D. y Roger A. Freedman, 2009)Un helicóptero militar está en una misión de entrenamiento y vuela horizontalmente con una rapidez de 60.0 m>s y accidentalmente suelta una bomba (desactivada, por suerte) a una altitud de 300 m. Puede despreciarse la resistencia del aire. a) ¿Qué tiempo tarda la bomba en llegar al suelo? b) ¿Qué distancia horizontal viaja mientras cae? c) Obtenga las componentes horizontal y vertical de su velocidad justo antes de llegar al suelo.

Ejercicio 4.1.10.Problema3.11. (Young, Hugh D. y Roger A. Freedman, 2009) Dos grillos, Chirpy y Milada, saltan desde lo alto de un acantilado vertical. Chirpy simplemente se deja caer y llega al suelo en 3.50 s; en tanto que Milada salta horizontalmente con una rapidez inicial de 95.0 cm/s. ¿A qué distancia de la base del acantilado tocará Milada el suelo?

Ejercicio 4.1.11.Problema3.22. (Young, Hugh D. y Roger A. Freedman, 2009) Suponga que el ángulo inicial a0 de la figura 3.26 es de 42.08 y la distancia d es de 3.00m. ¿Dónde se encontrarán el dardo y el mono, si la rapidez inicial del dardo es a) 12.0 m/s? b) ¿8.0 m/s? c) ¿Qué sucederá si la rapidez inicial del dardo es de 4?0 m/s? Dibuje la trayectoria en cada caso.

4.2. EJERCICIOS PROPUESTOS DE APLICACIÓN DE ÁLGEBRA EN FISICA (MOVIMIENTO EN DOS DIMENSIONES)

Ejercicio 4.2.1. Ejemplo 3.8 Altura y alcance de un proyectil. Edición segunda Física Universitaria. Para un proyectil lanzado con rapidez v0 y ángulo inicial a0 (entre 0° y 90°), deduzca expresiones generales para la altura máxima h y el alcance horizontal R (figura 3.23). Para una v0, dada, ¿qué valor de a0 da la altura máxima? ¿Y qué valor da el alcance horizontal máximo?

Ejercicio 4.2.2. Ejemplo 3.6 Cuerpo que se proyecta horizontalmente. Edición segunda Física Universitaria. Un acróbata en motocicleta se lanza del borde de un risco. Justo en el borde, su velocidad es horizontal con magnitud de 9.0 m>s. Obtenga la posición, distancia desde el borde y velocidad de la motocicleta después de 0.50 s.

Ejercicio 4.2.3. Problema 4.21 Edición cuarta SERWAY. Durante la primera guerra mundial los alemanes tenían un cañón llamado Big Bertha que se usó para bombardear Paris. Los proyectiles tenían una velocidad inicial de 1.7 km/sa una inclinación de 55° con la horizontal. Para dar en el blanco, se hacían ajustes en relación con la resistencia del aire y otros efectos. Si ignoramos esos efectos:

¿Cuál era el alcance de los proyectiles? (Serway, 2000)

Ejercicio 4.2.4.Problema 3.18. (Young, Hugh D. y Roger A. Freedman, 2009) Una pistola que dispara una luz bengala le imprime una velocidad inicial de 125 m/s en un ángulo de 55.0° sobre la horizontal. Ignore la resistencia del aire. Si la bengala se dispara, obtenga su altura máxima y la distancia del punto de disparo al punto de caída, a) en los salares planos de Utah y b) en el Mar de la Tranquilidad en la Luna, donde g = 1.67 m/s^2.

Ejercicio 4.2.5.Problema 3.19. (Young, Hugh D. y Roger A. Freedman, 2009) Un pelotero de grandes ligas batea una pelota de modo que sale del bate con una rapidez de 30.0 m/s y un ángulo de 36.9° sobre la horizontal. Ignore la resistencia del aire.

a) ¿En cuáles dos instantes la pelota estuvo a 10.0 m sobre el punto en que se salió del bate? b) Obtenga las componentes horizontal y vertical de la velocidad de la pelota en cada uno de los dos instantes calculados en el inciso a). c) ¿Qué magnitud y dirección tenía la velocidad de la pelota al regresar al nivel en el que se bateó?

Ejercicio 4.2.6.Problema 3.24. (Young, Hugh D. y Roger A. Freedman, 2009) Los bomberos están lanzando un chorro de agua a un edificio en llamas, utilizando una manguera de alta presión que imprime al agua una rapidez de 25.0 m/s al salir por la boquilla. Una vez que sale de la manguera, el agua se mueve con movimiento de proyectil. Los bomberos ajustan el ángulo de elevación de la manguera hasta que el agua tarda 3.00 s en llegar a un edificio que está a 45.0 m de distancia. Ignore la resistencia del aire y suponga que la boquilla de la manguera está a nivel del suelo. a) Calcule el ángulo de elevación de a. b) Determine la rapidez y aceleración del agua en el punto más alto de su trayectoria. c) ¿A qué altura sobre el suelo incide el agua sobre el edificio, y con qué rapidez lo hace?

Ejercicio 4.2.7.Problema 3.25. (Young, Hugh D. y Roger A. Freedman, 2009) Un globo de 124 kg que lleva una canastilla de 22 kg desciende con rapidez constante hacia abajo de 20.0 m/s. Una piedra de 1.0 kg se lanza desde la canastilla con una velocidad inicial de 15.0 m/s perpendicular a la trayectoria del globo en descenso, medida relativa a una persona en reposo en la canasta. Esa persona ve que la piedra choca contra el suelo 6.00 s después de lanzarse. Suponga que el globo continúa su descenso a los 20.0 m/s constantes. a) ¿A qué altura estaba el globo cuando se lanzó

la piedra? b) ¿Y cuando chocó contra el suelo? c) En el instante en que la piedra tocó el suelo, ¿a qué distancia estaba de la canastilla? d) Determine las componentes horizontal y vertical de la velocidad de la piedra justo antes de chocar contra el suelo, relativas a un observador i) en reposo en la canastilla; ii) en reposo en el suelo.

Ejercicio 4.2.8. Problema 3.26. (Young, Hugh D. y Roger A. Freedman, 2009) Un cañón, situado a 60.0 m de la base de un risco vertical de 25.0 m de altura, dispara un obús de 15 kg con un ángulo de 43.08 sobre la horizontal, hacia el risco. a) ¿Qué velocidad inicial mínima debe tener el obús para librar el borde superior del risco? b) El suelo en la parte superior del risco es plano, con una altura constante de 25.0 m sobre el cañón. En las condiciones del inciso a), ¿a qué distancia del borde del risco cae el obús? 3.27. Un avión vuela con una velocidad de 90.0 m/s a un ángulo de 23.0° arriba de la horizontal. Cuando está 114 m directamente arriba de un perro parado en suelo plano, se cae una maleta del compartimiento de equipaje. ¿A qué distancia del perro caerá la maleta? Ignore la resistencia del aire.

Ejercicio 4.2.9. Carlos y Saúl están viendo el futbol y observan al portero sacar el balón desde el césped a una velocidad de 28 m/s. Si la pelota sale del suelo con un ángulo de 45° y cae sobre el campo sin que antes lo toque ningún jugador, calcular:

- ✓ Altura máxima del balón
- ✓ Distancia desde el portero hasta el punto donde caerá en el campo
- ✓ Tiempo en que la pelota estará en el aire

Ejercicio 4.2.10. Camila y Emilio están jugando en el patio de un colegio, cuando el balón sale al exterior por encima de las mallas del campo. Una mujer le da una patada al balón para devolverlo al interior. Sabiendo que el muro del patio tiene 2,5 m de altura, que el hombre está a 43 m del muro y que patea el balón a 22 m/s con un ángulo de 50°, averiguar si consigue que la pelota vuelva a entrar al patio o, por el contrario, pasa sobre el muro.

4.3. EJERCICIO PROPUESTO DE APLICACIÓN DE TRIGONOMETRÍA EN FÍSICA (MOVIMIENTO EN DOS DIMENSIONES)

Ejemplo 4.3.1. Ejercicio 12. Problema 1 Edición 2010. Física De Vallejo-Zambrano Tomo 1. Ejercicio 12 Problema 1 Edición 2010. Física De Vallejo-Zambrano Tomo 1**.** Un automóvil parte del reposo en una vía circular de 400m de radio con MCUV, hasta que alcanza una rapidez de 72km/h en un tiempo de 50s. (Vallejo-Zambrano, 2010)

Determinar

a) La velocidad angular final
b) La velocidad angular media
c) La aceleración angular
d) El desplazamiento angular

Ejercicio 4.3.2. Problema 3.28. (Young, Hugh D. y Roger A. Freedman, 2009). Imagine que, en su primer día de trabajo para un fabricante de electrodomésticos, le piden que averigüe qué hacerle al periodo de rotación de una lavadora para triplicar la aceleración centrípeta, y usted impresiona a su jefa contestando inmediatamente. ¿Qué le contesta?

Ejercicio 4.3.3. Problema 3.29. (Young, Hugh D. y Roger A. Freedman, 2009) La Tierra tiene 6380 km de radio y gira una vez sobre su eje en 24 h. a) ¿Qué aceleración radial tiene un objeto en el ecuador? Dé su respuesta en m/s^2 y como fracción de g. b) Si arad en el ecuador fuera mayor que g, los objetos saldrían volando hacia el espacio. (Veremos por qué en el capítulo 5.) ¿Cuál tendría que ser el periodo de rotación para que esto sucediera?

Ejercicio 4.3.4. Problema 3.30. (Young, Hugh D. y Roger A. Freedman, 2009) Un modelo de rotor de helicóptero tiene cuatro aspas, cada una de 3.40 m de longitud desde el eje central hasta la punta. El modelo se gira en un túnel de viento a 550 rpm.

a) ¿Qué rapidez lineal tiene la punta del aspa en m/s? b) ¿Qué aceleración radial tiene la punta del aspa, expresada como un múltiplo de la aceleración debida a la gravedad, es decir, g= 3.31. En una prueba de un "traje g", un voluntario se gira en un círculo horizontal de 7.0 m de radio. ¿Con qué periodo de rotación la aceleración centrípeta tiene magnitud de a) 3?0g? b) ¿10g?

Ejercicio 4.3.5.Problema 3.32. (Young, Hugh D. y Roger A. Freedman, 2009) El radio de la órbita terrestre alrededor del Sol (suponiendo que fuera circular) es de y la Tierra la recorre en 365 días. a) Calcule la magnitud de la velocidad orbital de la Tierra en m/s. b) Calcule la aceleración radial de la Tierra hacia el Sol en m/s^2. c) Repita los incisos a) y b) para el movimiento del planeta Mercurio (radio orbital 5 5.79 3 107 km, periodo orbital 5 88.0 días).

Ejercicio 4.3.6. La rueda de un coche de 40 cm de radio gira a 200 r.p.m. Calcula: a) El módulo de la velocidad angular en rad/s, b) El módulo de la velocidad lineal de su borde.

Ejercicio 4.3.7. César observa su CD-ROM, que tiene un radio de 5 cm y gira a una velocidad de 1500 rpm, ayuda a Cesar a determinar: a) El módulo de la velocidad angular en rad/s, b) El módulo de la velocidad lineal de su borde. Resultado: v= 20.7 m/s c) Su frecuencia.

Ejercicio 4.3.8. María compra un CD-ROM de 6 cm de radio, cuan María escucha el CD-ROMM esta gira a una velocidad de 2500 rpm. Si tarda en pararse 16 s, calcula: a) El módulo de la aceleración angular, b) Las vueltas que da antes detenerse.

Ejercicio 4.3.9. Un camión con unas ruedas de 60 cm de radio acelera desde 0 hasta 80 km/h en 3 s. Calcular: a) El módulo de la aceleración angular, b) Las vueltas que da en ese tiempo, c) El módulo de la aceleración normal para t= 4 s

Ejercicio 4.3.10. Una centrifugadora pasa de estar detenida a girar a 350 r.p.m. en 12 s. Si el radio del tambor es de 20 cm, calcular: a) El módulo de la aceleración angular, b) Las vueltas que da en ese tiempo, c) El módulo de la velocidad angular para t=8 s

5.- EVALUACIÓN FINAL

INSTRUCCIONES

- ✓ Lea detenidamente cada pregunta y conteste lo solicitado.
- ✓ El valor de cada pregunta es de 2 puntos cada una.
- ✓ No se admite el uso del corrector ni tachones.

OBJETIVO. - Evaluar los conocimientos adquiridos luego de la aplicación de la unidad cero" Lenguaje de la Física".

CUESTIONARIO

1. **RESUELVA LAS SIGUIENTES OPERACIONES Y SUBRAYE LAS RESPUESTA CORRECTA.**

   - ➢ (-1)20
   - ➢ (-1)33
   - ➢ c) (-3)5 . (2)4 . ((-4)2 + (-2))
   - ➢ $\frac{(-3)^5.(+7)^2}{(-4)^2+(-2)}$

a) 1; -1;-54 432;$-\frac{1701}{2}$ b)-1; -1;-54 442;$-\frac{1701}{4}$ c) 1; -1;-54 432;$\frac{1701}{2}$ d) 2; -1;54 432;$-\frac{1701}{2}$

2. **RESUELVE Y COMPLETA LOS ESPACIOS CON LAS RESPUESTAS CORRECTAS.**

   a) $5a + 3a - 2a - 7a + 3a =$

   b) $4b + 6a - 2b - 3a + 4a - 5b =$

   c) $6x^3 - 5xy^2 + 3x^3 - 5x^3 + 2xy^2 + 3xy^2 + 2x^3 =$

a) 2a; 7a-3b; 6x3 b) a) 2a; 7a+3b; 6x3 c) 2a; 7a-3b; 6x3 d) a; 6a-3b; 6x

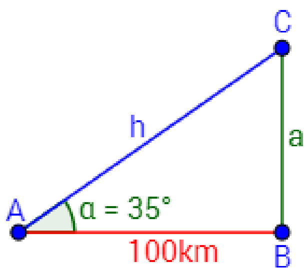
3. **ENCIERRA EN UN CIRCULO CADA CASO, EL VALOR DE X QUE ES LA SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN**

   a) $3x + 4 = 10 \rightarrow x = 1 \quad x = 2 \quad x = 3 \quad x = 4$

   b) $5x - 6 = 9 \rightarrow x = 1 \quad x = 2 \quad x = 3 \quad x = 4$

4. **RESUELVA Y SUBRAYE LA RESPUESTA CORRECTA**

   Las ciudades A, B y C son los vértices de un triángulo rectángulo:

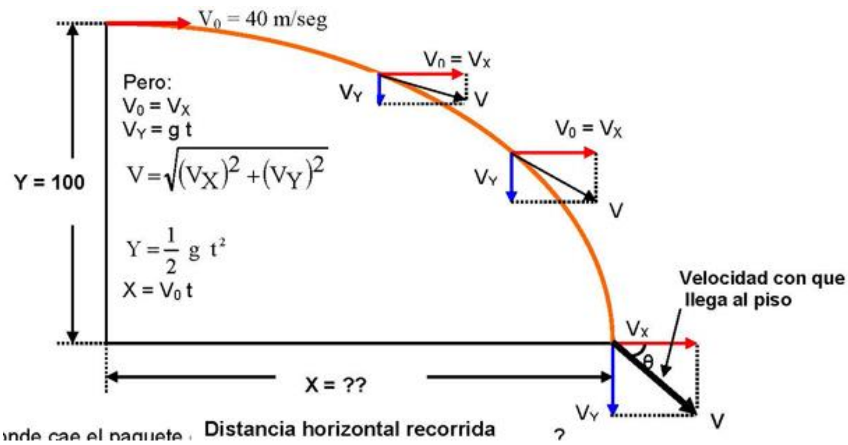


   Calcular la distancia entre las ciudades A y C y entre las ciudades B y C si la ciudad B se encuentra a 100km de la ciudad A y la carretera que una A con B forma un ángulo de 35º con la carretera que une A con C.

a) 122,1Km; 60,08Km b) 102,1Km; 70,08 Km c) 122,1Km; 70,08 Km

5. RESUELVA

Un avión de rescate en Alaska deja caer un paquete de provisiones a un grupo de exploradores extraviados, como se muestra en la figura 4.11.Si el avión viaja horizontalmente a 40 m/s. Y a una altura de 100 metros sobre el suelo. Donde cae el paquete en relación con el punto en que soltó.



FUENTE: Edición cuarta SERWAY

BIBLIOGRAFÍA

(s.f.).

Ausubel. (1973). Teoria del aprendizaje. En Ausubel, Teoria del aprendizaje. Buenos Aires.

EDUCACIÓN, M. D. (2009).

Educación, M. d. (2018). Física 1° curso. En M. d. Educación, Física 1° curso (págs. 40-41). Quito: Don Bosco.

EDUCACIÓN, M. D. (2019). CURRICULO DE MATEMÁTICA . En M. D. EDUCACIÓN, CURRICULO DE MATEMÁTICA .

Julián, C. (2017). Movimiento Circular.

Miño, L. á. (2016). Relación de la física con la matemática. Nueva manera de asociar conceptos y medidas.

SÁNCHEZ, S. (2015). Operaciones Aritméticas. Quito.

Serway. (2000). Física. En Serway, Física. Buenos Aires: McGraw-Hill.

Vallejo-Zambrano. (2010). Física tomo 1. En Vallejo-Zambrano, Física tomo 1. Quito.

Young, Hugh D. y Roger A. Freedman. (2009). Física Universitaria. En H. D. Young, Física Universitaria (pág. 107). México: Pearson Educación.

6. ANEXO

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CHIMBORAZO
INSTITUTO DE POSGRADO
MAESTRIA EN CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN, APRENDIZAJE DE LA FÍSICA

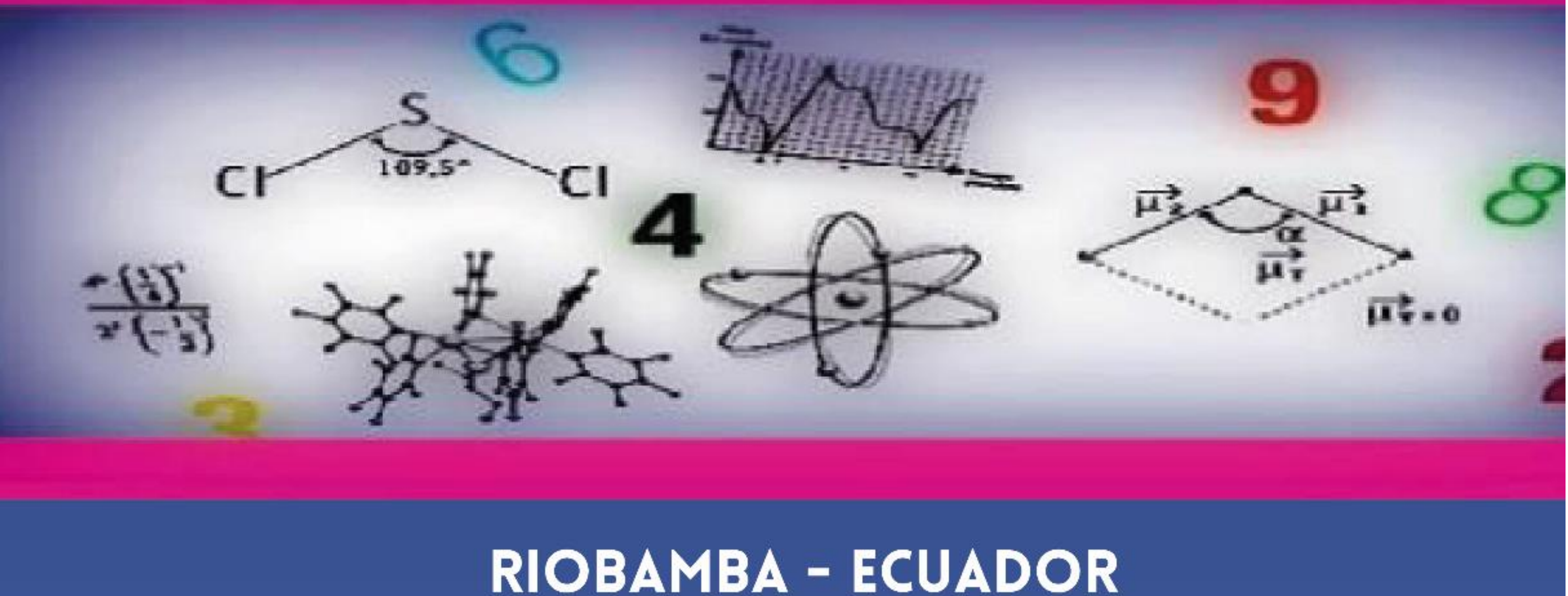
FICHA DE OBSERVACIÓN: Dirigida los estudiantes de Primero de Bachillerato de la Unidad Educativa Capitán Edmundo Chiriboga.

OBJETIVO: Obtener información sobre los conocimientos de los fundamentos matemáticos básicos que dominan los estudiantes para mejorar el aprendizaje de la física en el bloque curricular Movimiento en dos dimensiones.

N.º	PARÁMETROS A SER OBSERVADOS	1ro BGU A				1ro BGU B			
		SI	%	NO	%	SI	%	NO	%
1	Resuelven correctamente los problemas de movimiento en dos dimensiones								
2	Participan en forma grupal durante el desarrollo de los problemas de movimiento en dos dimensiones.								
3	Aplican la resolución de operaciones aritméticas en el desarrollo de los problemas de movimiento en dos dimensiones.								
4	Desarrollan los ejercicios de física en el bloque curricular movimientos en dos dimensiones, utilizando correctamente los conocimientos de operaciones algebraicas.								
5	Aplican correctamente los conocimientos de ecuaciones de primer grado en la resolución de problemas de movimiento en dos dimensiones.								
6	Aplican correctamente los conocimientos de ecuaciones de segundo grado en la resolución de problemas de Movimiento en dos dimensiones.								
7	Miden el alcance de los aprendizajes requeridos en las leyes del movimiento en dos dimensiones								
8	Relacionan los conocimientos de trigonometría con la resolución de problemas de física en el bloque curricular movimientos en dos dimensiones.								
9	Mejoran en el desarrollo de problemas de física en el bloque curricular movimientos en dos dimensiones con el dominio de resolución de triángulos rectángulos.								
10	Aplican correctamente las funciones trigonométricas en el desarrollo de problemas de física en el bloque curricular movimientos en dos dimensiones								

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CHIMBORAZO

RIOBAMBA - ECUADOR



RIOBAMBA - ECUADOR
2019