UNIVERSIDAD NACIONAL DE CHIMBORAZO
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN HUMANAS Y TECNOLOGÍAS

CARRERA DE CIENCIAS EXACTAS

“Trabajo de grado previo a la obtención del título de Licenciada en Ciencias de la Educación, Profesor de Ciencias Exactas”

TRABAJO DE GRADUACIÓN

ELABORACIÓN Y APLICACIÓN DE GUÍA DIDÁCTICA CON ENFOQUE CONSTRUCTIVISTA PARA EL APRENDIZAJE DE TRIGONOMETRÍA EN LOS ESTUDIANTES DE TERCER SEMESTRE, DE LA ESCUELA CIENCIAS EXACTAS, PERIODO DICIEMBRE 2012 – JUNIO 2013.

Autora: María Inés Cruz Morocho

Tutora: Máster Narcisa Sánchez

Riobamba – Ecuador

2016

REVISIÓN DEL TRIBUNAL

Los miembros del Tribunal de Graduación del proyecto de investigación de título ELABORACIÓN Y APLICACIÓN DE GUÍA DIDÁCTICA CON ENFOQUE CONSTRUCTIVISTA PARA EL APRENDIZAJE DE TRIGONOMETRÍA EN LOS ESTUDIANTES DE TERCER SEMESTRE, DE LA ESCUELA, CIENCIAS EXACTAS, PERIODO DICIEMBRE 2012 – JUNIO 2013.
Presentado por: María Inés Cruz Morocho y dirigida por: Máster Narcisa Sánchez.

Una vez escuchada la defensa oral y revisado el informe final del proyecto de investigación con fines de graduación escrito en la cual se ha constatado el cumplimiento de las observaciones realizadas, remite la presente para uso y custodia en la biblioteca de la Facultad de Ciencias de la Educación Humanas y Tecnologías de la UNACH.

Para constancia de lo expuesto firman:

Msc. Héctor Morocho **Presidente del Tribunal**	--------------------------- **Firma**
Msc. Narcisa Sánchez **Miembro del Tribunal**	Narcisa Sánchez --------------------------- **Firma**
Msc. Carlos Aimacaña **Miembro del Tribunal**	--------------------------- **Firma**

AUTORÍA DE LA INVESTIGACIÓN

"La responsabilidad del contenido de este Proyecto de Graduación, nos corresponde exclusivamente a: María Inés Cruz Morocho y a la Tutora del Proyecto; y el patrimonio intelectual de la misma a la Universidad Nacional de Chimborazo.

María C.

Cruz Morocho María Inés
C.I.0604251298

CERTIFICACIÓN DEL TUTOR DE TESIS

Msc. Narcisa Sánchez Tutora de Tesis.

CERTIFICA :

Que la investigación desarrollada por la egresada de la Facultad de Ciencias de la Educación, Humanas y Tecnologías, Carrera de Ciencias Exactas, María Inés Cruz Morocho , en la présente tesis denominada ELABORACIÓN Y APLICACIÓN DE GUÍA DIDÁCTICA CON ENFOQUE CONSTRUCTIVISTA PARA EL APRENDIZAJE DE TRIGONOMETRÍA EN LOS ESTUDIANTES DE TERCER SEMESTRE,DE LA ESCUELA CIENCIAS EXACTAS, PERIODO DICIEMBRE 2012 – JUNIO 2013, cumplió con todos los aspectos normales, técnicos y reglamentarios establecidos por la Universidad y la Facultad, conforme queda documentado.

Por lo manifestado

APRUEBA:

La impresión de la presente investigación, para ser sometida a la sustentación pública y evaluación por parte del jurado examinador que se designe.

Narcisa Sánchez

Msc. Narcisa Sánchez S.

TUTORA DE TESIS

DEDICATORIA

Quiero dedicar este trabajo a mis padres, por todo lo que me han dado en esta vida, por su acompañamiento a través de todos mis procesos, especialmente por sus sabios consejos, por estar a mi lado en los momentos difíciles y por apoyo incondicional.

A Dios por ser la fuerza y la luz que guía mi camino, a la vida misma que me ha dado una nueva oportunidad para culminar una etapa y alcanzar un logro más.

Por ultimo a mis familiares, amigos, a mi esposo y a mi hijo quienes me han acompañado en silencio con una comprensión a prueba de todo.

MARÍA CRUZ

RECONOCIMIENTO

A Dios creador del universo y dueño de nuestra vida que me ha permitido construir otros mundos mentales posibles.

A mis padres, por el apoyo incondicional que me brindaron a lo largo de la carrera.

A mis Maestros por permitirme soñar y crecer con su imaginación.

A todos los directivos de la UNIVERSIDAD NACIONAL DE CHIMBORAZO, por su apoyo y colaboración para la realización de esta investigación.

A la FACULTAD CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN, HUMANAS Y TECNOLOGÍAS, por el soporte institucional dado para la realización de este trabajo.

A la Msc. Narcisa Sánchez por su asesoría y dirección en el trabajo de investigación.

Y a todas aquellas personas que de una u otra forma, colaboraron o participaron en la realización de esta investigación, hago extensivo mi más sincero agradecimiento.

MARIA CRUZ

ÍNDICE

ÍNDICE DE CUADROS DE LAS ENCUESTAS APLICADAS

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE GRÁFICOS

RESUMEN

Se ha visualizado a lo largo de experiencia como docente que si bien es cierto la Trigonometría como tal es una rama importante que involucra entender los aspectos que nos rodean; pero ante los estudiantes los docentes han venido utilizando el método de enseñanza tradicional, donde solamente se dicta la clase teórica y se resuelve los ejercicios en la pizarra, en cuanto al estudiante hay veces que aprenden y hay ocasiones que están vacíos en relación al entendimiento de la trigonometría. Llevando al estudiante a perderse en el proceso enseñanza aprendizaje dando origen a muchos efectos negativos no solo en el proceso de enseñanza-aprendizaje sino también en el ámbito personal, produciendo una negativa para estudiar y entender a la trigonometría, la solución a esta problemática es la elaboración y aplicación de una guía didáctica con enfoque constructivista basado en el silabo del tercer semestre de ciencias exactas, siendo una de las mejores estrategias para garantizar la adquisición del conocimiento trigonométrico.Para su desarrollo se utilizó los métodos de investigación inductivo, analítico y sintético; el tipo de investigación en la cual se sustentó y se basó es la investigación diagnostica o propositiva, la misma que tiene un diseño de campo, bibliográfico. Además la investigación se apoyó de la validación de instrumentos para recolectar información tales como la encuesta y cuestionario, mismos que se aplicaron a diecisiete señores estudiantes de los cuales demuestran que para que el proceso de enseñanza-aprendizaje sea completo, dinámico y divertido debe utilizarse la aplicación de una guía didáctica con contenidos temáticos de acuerdo al silabo de trigonometría del tercer semestre y su aplicación en la resolución de problemas teniendo el involucramiento activo de los estudiantes concluyendo el proceso de enseñanza con un aprendizaje significativo.

.

SUMMARY

It has been seen over experience as a teacher that, while it is true the Trigonometry as such is an important branch that involves understanding the issues that surround us; but before the students, teachers have been using the method of traditional teaching, where it only dictates the theoretical class and resolves the exercises in the Blackboard, as soon as the student there are times that learn and there are times that are empty in relation to the understanding of trigonometry. Leading the student to be lost in the teaching-learning process giving birth to many negative effects not only in the teaching-learning process but also on a personal level, producing a denial to study and understand the trigonometry, the solution to this problem is the development and implementation of an instructional guide with a constructivist approach based on the syllabus of the third semester of exact sciences, being one of the best strategies to ensure the acquisition of the trigonometric knowledge. For its development the inductive, analytical and synthetic research methods were used; the type of research in which it was sustained and based is the diagnostic or proactive research, the same that has a field design, bibliographic. In addition, the research was supported by the validation of an instrument to collect information such as the survey and questionnaire, which were applied to seventeen male students, which demonstrate that for the teaching-learning process be complete, dynamic and fun should be applied the implementation of an instructional guide with thematic contents according to the trigonometry syllabus of the third semester and its application in the resolution of problems taking the active involvement of students completing the teaching process with a meaningful learning.

Dra. Myriam Trujillo B. Mgs.
COORDINADORA DEL CENTRO DE IDIOMAS

INTRODUCCIÓN

La educación del siglo XXI exige la presencia de educadores que hagan de la enseñanza-aprendizaje un proceso activo, participativo y creativo para que los educandos alcancen aprendizajes significativos, es decir aprendizajes que les sirva de experiencia para afrontar los nuevos retos de la sociedad actual, para ello es preciso que los educadores dentro de su ambiente escolar hagan uso de estrategias de enseñanza que les permita guiar y estructurar mejor su práctica pedagógica para que contribuyan a lograr un aprendizaje constructivista y significativo.

La investigación tiene como finalidad determinar la importancia que tiene del aprendizaje de la Trigonometría en los estudiantes del Tercer Semestre de la Carrera de Ciencias Exactas: Facultad de Ciencias de la Educación Humanas y Tecnologías de la Universidad Nacional de Chimborazo, Cantón Riobamba, Provincia de Chimborazo durante el período Diciembre 2012 – Junio 2013; cuyo tema ha sido priorizado para el mejoramiento de su aprendizaje. El presente trabajo de investigación pretende elaborar una guía didáctica con enfoque constructivista para el aprendizaje de Trigonometría, con la finalidad de fortalecer los conocimientos de los estudiantes de Tercer Semestre de la Facultad de Ciencias de la Educación, Humanas y Tecnologías: Carrera de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional de Chimborazo. El proceso pedagógico se centra en el desarrollo del Silabo establecido para esta área de estudio correspondiente a este nivel, haciendo uso adecuado de los materiales, instrumentos y más recursos necesarios que conlleven a la solución de los problemas trigonométricos.

Frente a este enfoque se puede determinar que la didáctica es una disciplina y un campo de conocimiento que se construye, en ambientes organizados de relación y comunicación intencionadas, donde se desarrollan procesos de enseñanza y aprendizaje para la formación de los estudiantes hacia enfoques reales y objetivos que motiven a ser los futuros investigadores para descubrir nuevas realidades básicas para el desenvolvimiento del diario vivir y por ende alcancen el nivel óptimo en calidad de profesionales del futuro.

El papel que desempeña la didáctica en la trigonometría y otras ciencias queda reforzado si se tiene en cuenta la orientación, la planificación y la organización escolar como nuevas disciplinas de su área, tendiente a desarrollar nuevas habilidades para alcanzar aprendizajes significativos que permitan un cambio permanente de la conducta y pensamiento que un aprendiz emplea para intentar influir en los procesos decodificación según el estado motivacional y afectivo de cada estudiante.

La educación superior nos lleva a responder o establecer un camino de mejoramiento del aprendizaje en los estudiantes, a través de mecanismos constructivistas y desarrollo de estrategias cognitivas a base de clases grupales apoyadas de herramientas tecnológicas, a través de las llamadas guías didácticas.

La asignatura de Trigonometría de la Carrera de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional de Chimborazo requiere que los estudiantes hagan un hábil manejo de conocimientos básicos desarrollando habilidades y destrezas que permitan aplicaciones prácticas en su quehacer profesional.

El presente trabajo investigativo se lo ha organizado por capítulos atendiendo a las orientaciones de la tutora de acuerdo al formato de la universidad de la siguiente secuencia lógica:

El Capítulo I Se hace una descripción detallada de la problemática del proceso de enseñanza-aprendizaje de la trigonometría luego se determina y formula el problema, la justificación e importancia de investigación

En el Capítulo II Se realiza la mención de algunos antecedentes del tema de investigación, presentación del marco teórico que orienta y sustenta el trabajo de investigación la definición de algunos términos básicos y se identifican las variables.

El Capítulo III Se expone el diseño de la investigación. Así mismo se describe el procedimiento metodológico seguido con indicación explicaciones realizadas en el estudio así como las técnicas utilizadas para el tratamiento de datos.

En el Capítulo IV **S**e aborda el análisis, diseño e implementación de la propuesta, una guía didáctica con enfoque constructivista para el aprendizaje de trigonometría, para los estudiantes de 3° semestre de la facultad de Ciencias de la Educación, Humanas y Tecnologías, de la UNACH.

En el Capítulo V se expone las conclusiones y recomendaciones constan de un resumen de la investigación, obtenida del análisis e interpretación de los resultados, al igual que alternativas o propuestas de solución a la realidad investigada.

La BIBLIOGRAFÍA, que fue primordial para el proceso del trabajo investigativo.

En los ANEXOS, se insertan las evidencias de las acciones realizadas en el proceso de investigación.

CAPÍTULO I

1. MARCO REFERENCIAL

1.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

La Universidad Nacional de Chimborazo (UNACH)de la ciudad de Riobamba, es una institución educativa, formadora de profesionales de excelencia, eficientes y capaces de insertarse con gran facilidad en el campo educativo laboral de nuestro país; es por ello que el proceso de preparación en la docencia interdisciplinaria de sus estudiantes, debe ser una educación de calidad para todos sin importar si pertenecemos a una cultura, la educación se enfrenta constantemente a innumerables desafíos ante una sociedad tan cambiante en todos los campos del saber, como en el plano tecnológico y científico, dentro del proceso enseñanza-aprendizaje ,pero ante todas estas expectativas generadas existe un factor negativo que incide en el desempeño y el bajo rendimiento de los estudiantes del tercer semestre en la Carrera de Ciencias Exactas en el área de la Trigonometría; y si bien es cierto; la UNACH se ha caracterizado por lograr estándares de excelencia y calidad por lo tanto me enfocado a corregir este déficit para que el único beneficiado sea el estudiantado con un conocimiento optimo y de primera.

Una vez encaminada a mejorar el aprendizaje vea la necesidad de elaborar y aplicar una guía didáctica con enfoque constructivista para el aprendizaje en la asignatura de trigonometría, que contenga todos los temas del silabo, en cada unidad con sus respectivos ejercicios, donde los estudiantes apliquen sus habilidades y desarrollen sus destrezas para aprender a aprender.

Con esta investigación deseo motivar a los docentes y estudiantes de la UNACH a que utilicen esta guía didáctica para mejorar el aprendizaje de Trigonometría, en el rendimiento de aprendizaje del tercer semestre.

1.2FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

¿De qué manera la elaboración y aplicación de la guía didáctica con enfoque constructivista, mejora el aprendizaje de Trigonometría en los estudiantes del tercer semestre, de la Carrera de Ciencias Exactas durante el periodo Diciembre 2012 – Junio 2013?

1.3. OBJETIVOS

1.3.1. OBJETIVO GENERAL

Elaborar una guía didáctica con enfoque constructivista para el aprendizaje de Trigonometría en los estudiantes del tercer semestre, de la Carrera de Ciencias Exactas de la Facultad de Ciencias de la Educación Humanas y Tecnologías de la Universidad Nacional de Chimborazo, Cantón Riobamba, Provincia de Chimborazo durante el periodo Diciembre 2012 – Junio 2013?

1.3.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Determinar el nivel de conocimiento de los estudiantes.

- Seleccionar los contenidos de acuerdo al sílabo de la asignatura de Trigonometría con la finalidad de determinar los requerimientos necesarios de la guía didáctica.

- Diseñar una guía didáctica de Trigonometría considerando las necesidades educativas de los estudiantes.

- Aplicar la guía didáctica de Trigonometría con enfoque constructivista, a los estudiantes de Tercer Semestre de la Carrera de Ciencias Exactas para mejor entendimiento de los contenidos propuestos.

- Evaluar la guía didáctica con enfoque constructivista para el aprendizaje de Trigonometría mediante actividades integradas de manera continua a los y las estudiantes.

1.4. JUSTIFICACIÓN E IMPORTANCIA

Este proyecto es una herramienta potencial para los estudiantes de tercer semestre de la carrera de Ciencias Exactas, el mismo que sirve como material de apoyo, para la aplicación y desarrollo de la trigonometría, cátedra que específicamente está basada en los sílabos planificados, permitiendo así arrancar con el esquema constructivista, con la ayuda de una guía didáctica el mismo que en cada capítulo sujetará problemas planteados de la vida cotidiana.

Este trabajo de investigación es de gran importancia para los estudiantes del Tercer Semestre de la escuela de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional de Chimborazo en virtud de que permite orientar fundamentalmente a los docentes al desarrollo de nuevos métodos, técnicos y estrategias que aporten a generar aspectos motivacionales en beneficio de los estudiantes para alcanzar aprendizajes significativos. Es pertinente el desarrollo del trabajo de investigación por cuanto se parte del docente, ya que es quien orienta centradamente una didáctica creando un adecuado proceso enseñanza aprendizaje en los estudiantes para que se sientan motivados y seguros de sus nuevos conocimientos.

Esta investigación es innovadora en el campo del análisis de la utilización de los recursos didácticos y metodológicos en la preparación de docentes de ciencias exactas de la UNACH.

Además mediante la compilación de conocimientos teóricos de diversas fuentes de consulta, el análisis teórico y la observación directa a los estudiantes de la escuela de ciencias exactas las mismas que permitirán realizar la elaboración de la guía didáctica y obtener datos beneficiosos la factibilidad de este trabajo de investigación permitirá con los recursos humanos, económicos y tecnológicos los mismos que serán aportados por la investigadora, siendo los beneficiarios directos los estudiantes de la Carrera Ciencias Exactas de la Facultad de Ciencias de la Educación Humanas y Tecnologías de la UNACH.

Estos puntos justifican la importancia de este trabajo, ya que los resultados obtenidos son relevantes para la didáctica de la trigonometría a nivel universitario.

CAPÍTULO II

2. MARCO TEÓRICO

2.1. ANTECEDENTES DE LA INVESTIGACIÓN

Una vez revisado en la biblioteca de la Universidad Nacional de Chimborazo, Facultad de Ciencias de la Educación Humanas y Tecnologías, Escuela de Ciencias Especialidad; Ciencias Exactas, se encuentran temas que tienen cierta relación al tema, pero el presente trabajo tiene un enfoque diferente, por lo que se considera de gran valía ejecutarlo ya que sus contenidos científicos y teóricos hacen referencia específicamente hacia el mejoramiento del aprendizaje de la trigonometría en los estudiantes de Tercer Semestre de la Escuela de Ciencias Exactas, por lo que el tema seleccionado es importante y significativo para ser investigado porque contribuyera a resolver los problemas que se generan en el campo educativo.

A continuación se hace referencia de los temas similares existentes en la Facultad de Ciencias de la Educación Humanas y Tecnológicas:

Tema: La Aplicación de la Teoría De Vygotsky y su relación en el aprendizaje de la trigonometría plana, en los estudiantes del Tercer Semestre, de la Carrera de Ciencias Exactas, en el período, Septiembre 2013 – Octubre 2014.Cuyo **autor** es Carlos Cristian Chafla Remache. Se planteó como objetivo identificar si los docentes de la carrera de Ciencias Exactas aplican los fundamentos teóricos metodológicos que sustenta la teoría de Vygotsky en el aprendizaje de la Trigonometría Plana; llego a una conclusión que los fundamentos teóricos y científicos que sustentan la teoría de Vygotsky para el estudio de la teoría plana y el empleo de la guía didáctica viabiliza un trabajo consiente responsable, con libertad y autonomía durante la sección de clases, produciendo efectos positivos en el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje de las unidades de la trigonometría plana, logrando así mejores resultados.

Tema: La aplicación de la teoría del descubrimiento de Jerome Bruner y su relación con el aprendizaje de la Trigonometría Plana, en los estudiantes de Tercer Semestre de la Escuela de Ciencias, Carrera de Ciencias durante el periodo Septiembre 2013 – Octubre 2014. Cuya **autora**: Mónica Cabay; se planteó como objetivo: determinar los fundamentos teóricos del descubrimiento de Jerome Bruner en aprendizaje de la Trigonometría Plana; llego a una conclusión que mediante la aplicación de la guía basada en la teoría de Descubrimiento de Jerome Bruner se pudo evidenciar que los aprendizajes de los estudiantes de Tercer Semestre de la Carrera de Ciencias Exactas.

Este trabajo es original, propio y existe otro similar, por lo que, se le considera que será de ayuda para los docentes y estudiantes de la Carrera de Ciencias Exactas de la Facultad de Ciencias de la Educación Humanas y Tecnologías, de la Universidad Nacional de Chimborazo.

2.2. FUNDAMENTO TEÓRICO

2.2.1. APRENDIZAJE

El aprendizaje es el proceso a través del cual se adquieren o modifican habilidades, destrezas, conocimientos, conductas o valores, conceptual, como resultado del estudio, la experiencia, la instrucción, el razonamiento y la observación.

También se puede definir “como un proceso de cambio relativamente permanente en el comportamiento de una persona generando por la experiencia” (Feldman, 2005). Además los cambios en el comportamiento o en la capacidad son justamente justos y por lo tanto pueden ser medidos en lo que se aprende de todo como es lo bueno, lo malo como leer, investigar, cantar, robar; aprenden en la casa, colegios, aprenden en cualquier parte.

El aprendizaje es el proceso mediante el cual se adquiere de conocimientos, habilidades, valores y actitudes, posibilitado mediante el estudio, se asimila una información ose adopta unas nuevas estrategias de conocimientos y acciones es decir como el cambio de la conducta relativa debido a la experiencias.

“Es el proceso mediante el cual se origina o se modifica una actividad respondiendo a una situación siempre que los cambios no puedan ser atribuidos al crecimiento o al estado temporal del organismo (como la fatiga o bajo el efecto de las drogas)”(Hilgard, 1957). De igual forma en los cambios que refleja la adquisición de conocimientos o en la capacidad conductual a través de la experiencia y que puede contener en el estudio, la práctica o dicho cambio debe ser perdurable o inmortal en el tiempo.

“El ser humano aprende con todo su organismo y para integrarse mejor en el medio físico y social, atendiendo a las necesidades biológicas, psicológicas y sociales que se le presentan en el transcurso de la vida. Esas necesidades pueden dominarse dificultades u obstáculos. Si no hubiera aprendizaje no hubiera aprendizaje.” (Imideo, 1985)

Como también es un proceso activo de construcción de conocimientos, de adquisición de habilidades, creativas y estrategias, de apropiación de actitudes y valores, saber, saber hacer.

El aprendizaje humano está relacionado con la educación y el desarrollo personal, es vital para los seres humanos, puesto que nos permite adaptarnos intelectualmente al medio en que vivimos por medio de una modificación de la conducta y se produce unido a una estructura determinada por la realidad o en la naturaleza, en general el aprendizaje tiene que comprender con la realidad que determina con el lenguaje, al sujeto que utiliza el lenguaje.

El aprendizaje humano (NOVAK, 1996) conduce a los cambios en el significado de la experiencia en efectiva la educación cambia el significado de la experiencia humana, puede ser considerada que tenga los contenidos amplios, con el objeto de ajustar a las demandas de la vida cotidiana.
El aprendizaje humano se define como el cambio relativamente invariable de la conducta de una persona a partir del resultado de la experiencias de distintas dimensiones como son las siguientes; conceptos, procedimientos, actitudes e ideas y valores, el estudio aplica del como aprender interesa a la neuropsicología, la psicología educacional y la pedagogía. Gracias el desarrollo del aprendizaje, podemos lograr alcanzar a los cambios de acuerdo a las necesidades a cada uno de nosotros.

2.2.1.1. ESTILO DE APRENDIZAJE

El estilo de aprendizaje es el conjunto de características psicológicas que suelen expresarse conjuntamente cuando una persona debe enfrentar una situación de aprendizaje; en otras palabras, las distintas maneras en que un individuo puede aprender. Se cree que una mayoría de personas emplea un método particular de interacción, aceptación y procesado de estímulos e información. También se refiere al hecho, cuando queremos aprender algo de cada uno de nosotros utilizamos nuestros propios métodos o de conjuntos de estrategias.

(Smith, 1988)"Los modos característicos por los que individuo procesa información, siente y se comporta en situaciones de aprendizaje".

Las características sobre estilo de aprendizaje suelen formar parte de cualquier informe psicopedagógico que se elabore de un alumno y pretende dar pistas sobre las estrategias didácticas y refuerzos que son más adecuados para los alumnos. No hay estilos puros, del mismo modo que no hay estilos de personalidad puros: todas las personas utilizan diversos estilos de aprendizaje, aunque uno de ellos suele ser el predominante.

El concepto de los estilos de aprendizaje está directamente relacionado con la concepción del aprendizaje como un proceso activo. Si consideramos que el aprendizaje equivale a recibir información de manera pasiva lo que el alumno haga o piense no es muy importante, pero si entendemos el aprendizaje como la elaboración por parte del receptor de la información recibida parece bastante evidente que cada uno de nosotros elaborará y relacionará los datos recibidos en función de sus propias características.

"Los estilos de aprendizaje son los rasgos cognitivos, afectivos y fisiológicos que sirven como indicadores relativamente estables, de cómo los alumnos perciben interacciones y responden a sus ambientes de aprendizaje", (KEEFE J., 1990)

2.2.1.2. PROCESO DE APRENDIZAJE

Los procesos de aprendizaje son las actividades que realizan los estudiantes para conseguir el logro de los objetivos educativos que pretenden. Constituyen una actividad individual, aunque se desarrolla en un contexto social y cultural, que se produce a través de un proceso de interiorización en el que cada estudiante concilia los nuevos conocimientos a sus estructuras cognitivas previas. La construcción del conocimiento tiene pues dos vertientes: una vertiente personal y otra social.

En general, para que se puedan realizar aprendizajes son necesarios tres factores básicos:

- **Inteligencia y otras capacidades, conocimientos previos (podes aprender)** para aprender nuevas cosas hay que estar en condiciones de hacerlo, se debe disponer de las capacidades cognitivas necesarias para ello (atención, proceso) y de los conocimientos previos imprescindibles para construir sobre ellos los nuevos aprendizajes

- **Experiencia** (saber aprender): los nuevos aprendizajes se van construyendo a partir de los aprendizajes anteriores y requieren ciertos hábitos y la utilización de determinadas técnicas de estudio:
  - Instrumentales básicas: observación, lectura, escritura...
  - Repetitivas (memorizando): copiar, recitar, adquisición de habilidades de procedimiento.
  - De comprensión: vocabulario, estructuras sintácticas.
  - Elaborativas (relacionando la nueva información con la anterior): subrayar, completar frases, resumir, esquematizar, elaborar diagramas y mapas conceptuales, seleccionar, organizar.
  - Exploratorias: explorar, experimentar,
  - De aplicación de conocimientos a nuevas situaciones, creación.
  - Regulativas (meta cognición): analizando y reflexionando sobre los propios procesos cognitivos.

- **Motivación (querer aprender):** para que una persona realice un determinado aprendizaje es necesario que movilice y dirija en una dirección determinada energía para que las neuronas realicen nuevas conexiones entre ellas.

También dependerá de múltiples factores personales (personalidad, fuerza de voluntad), familiares, sociales y del contexto en el que se realiza el estudio (métodos de enseñanza, profesorado).

Todo aprendizaje supone una modificación en las estructuras cognitivas de los aprendices o en sus esquemas de conocimiento y, se consigue mediante la realización de determinadas operaciones cognitivas. No obstante, a lo largo del tiempo se han presentado diversas concepciones sobre la manera en la que se producen los aprendizajes y sobre los roles que deben adoptar los estudiantes en estos procesos.

En cualquier caso hoy en día aprender no significa ya solamente **memorizar** la información, es necesario también:

- Comprender: nueva información.
- Analizar.
- Considerar relaciones con situaciones conocidas y posibles aplicaciones. En algunos casos valorarla.
- Sintetizar los nuevos conocimientos e integrarlos con los saberes previos para lograr su "apropiación" e integración en los esquemas de conocimiento de cada uno.

Se consideran 6 objetivos cognitivos básicos: conocer, comprender, aplicar, analizar, sintetizar y valorar.

El aprendizaje siempre implica:

- Una recepción de datos, que supone un reconocimiento y una elaboración semántico-sintáctica de los elementos del mensaje (palabras, iconos, sonido) donde cada sistema simbólico exige la puesta en juego actividades mentales distintas: los textos activan las competencias lingüísticas, las imágenes las competencias perceptivas y espaciales, etc.

- La comprensión de la información recibida por parte de los estudiantes que, a partir de sus conocimientos anteriores, sus habilidades cognitivas y sus intereses, organizan y transforman la información recibida para elaborar conocimientos.

- Una retención a largo plazo de esta información y de los conocimientos asociados que se hayan elaborado.

- La transferencia del conocimiento a nuevas situaciones para resolver con su concurso las preguntas y problemas que se plateen.

A veces los estudiantes no aprenden porque no están motivados y por ello no estudian, pero otras veces no están motivados precisamente porque no aprenden, ya que utilizan estrategias de aprendizaje inadecuadas que les impiden experimentar la sensación de "saber que se sabe aprender" (de gran poder motivador). A hay alumnos que solamente utilizan estrategias de memorización (de conceptos, modelos de problemas) en vez de intentar comprender la información y elaborar conocimiento, buscar relaciones entre los conceptos y con otros.

2.2.1.3. TIPOS DE APRENDIZAJE

Desde el punto de vista didáctico, el aprendizaje puede ser coordinado, en orden de complejidad, en tres formas: motora, emocional e intelectual.

a) Forma Motora.- es la que evidencia los movimientos musculares y puede ser: sensorio Motora y perceptivo Motora.
b) Sensorio Motora.- Persigue habilidades motoras fácilmente automatizables y pueden funcionar con mínimo de control del pensamiento.
c) Perceptivo Motora.- Nos permiten realizar sin esfuerzo aparente complejas secuencias de movimientos.

También la ciencia define como procesos de realizar leyes, paradigmas existen cinco tipos de aprendizaje son las siguientes:

- ✓ Aprendizaje de mantenimiento: Thomas Kuhn manifiestas que cuyo objeto es la adquisición de criterios, métodos procesos y reglas fijas para hacer frente a las situaciones conocidas y recurrentes para que los alumnos sean capaces de realizar cualquier investigación de la trigonometría.

- ✓ Aprendizaje Innovador: Es aquel que puede soportar cambios modificaciones renovación reestructuración y reformulación de problemas conflictos y propone nuevos cambios, valores en vez de conservar los antiguos o pasados.
- ✓ Aprendizaje Visual: Las personas que usan el sistema de representación visual observan las cosas como imágenes ya que representar las cosas como gráficos o imágenes les ayuda recordar y aprender, las personas que son visuales tienen la facilidad de pasar de un tema a otro favorece el trabajo creativo en el grupo y en el entorno de aprendizaje social asimismo la persona visual puede irritar que percibe las cosas individualmente.

- ✓ Aprendizaje Auditivo: Las personas auditivas aprenden escuchando y se prestan atención al énfasis a las pausas, tonos de voz también disfrutan del silencio; también aprovecha al máximo los debates en grupos y en la interacción social durante el aprendizaje, también el debate para una persona es una parte básica del aprendizaje.

- ✓ Aprendizaje Quinestésico: Las personas con sistemas de representación quinestésica muestran relajadas al hablar también hablan despacio realizan las cosas a través del cuerpo, experimentación para pensar con claridad necesitan movimiento y actividades no les da importancia al orden de las cosas y saben cómo utilizar las pausas son impacientes porque prefieren pasar a la acción.

2.2.2. TEORÍAS DEL APRENDIZAJE

Diversas teorías nos ayudan a comprender, predecir, y controlar el comportamiento humano y tratan de explicar cómo los sujetos acceden al conocimiento. Su objeto de estudio se centra en la adquisición de destrezas y habilidades, en el razonamiento y en la adquisición de conceptos.

Por ejemplo, la teoría del condicionamiento clásico de Pávlov: explica como los estímulos simultáneos llegan a evocar respuestas semejantes, aunque tal respuesta fuera evocada en principio sólo por uno de ellos. La teoría del condicionamiento instrumental u operante de Skinner describe cómo los refuerzos forman y mantienen un comportamiento determinado.

Albert Bandura describe las condiciones en que se aprende a imitar modelos. La teoría Psicogenética de Piaget aborda la forma en que los sujetos construyen el conocimiento teniendo en cuenta el desarrollo cognitivo. La teoría del procesamiento de la información se emplea a su vez para comprender cómo se resuelven problemas utilizando analogías y metáforas.

Existen diversas teorías del aprendizaje, cada una de ellas analiza desde una perspectiva particular el proceso.

Algunas de las más difundidas son:

2.2.2.1. TEORÍAS CONDUCTISTAS

- Condicionamiento clásico. Desde la perspectiva de I. Pávlov, a principios del siglo XX, propuso un tipo de aprendizaje en el cual un estímulo neutro (tipo de estímulo que antes del condicionamiento, no genera en forma natural la respuesta que nos interesa) genera una respuesta después de que se asocia con un estímulo que provoca de forma natural esa respuesta, cuando se completa el condicionamiento, el antes estímulo neutro procede a ser un estímulo condicionado que provoca la respuesta condicionada.

- Conductismo**.** Establece que el aprendizaje es un cambio en la forma de comportamiento en función a los cambios del entorno. Según esta teoría, el aprendizaje es el resultado de la asociación de estímulos y respuestas.

- Reforzamiento**.** Existen diversos reforzadores que actúan en todos los seres humanos de forma variada para inducir a la repetitividad de un comportamiento deseado. Entre ellos podemos destacar: los juguetes y las buenas calificaciones sirven como reforzadores muy útiles. Por otra parte, no todos los reforzadores sirven de manera igual y significativa en todas las personas, puede haber un tipo de reforzador que no propicie el mismo índice de repetitividad de una conducta, incluso, puede cesarla por completo.

Para los conductistas el aprendizaje es: Gradual y continuo, donde la fuerza paulatinamente al aumentar el número de ensayos resumiéndose en como la teoría que caracteriza el aprendizaje como una vinculación o conexión de estímulos y respuestas.

2.2.2.2. TEORÍAS COGNITIVAS

En el cognitivismo constituye que el aprendizaje se facilitara prudentes conocimiento más que los cambios en la probabilidad de la respuesta, en la adquisición de los conocimientos se relata como una actividad mental psicológico que implica una recopilación interna y una estructuración por parte del educando.

(AUSUBEL, 1968)Denomina a este fenómeno “aprendizaje verbal significativo” transmitiendo de sentido cognitivo al hecho común al explicar una parte del tema en la clase, y está afirmando esencialmente en los cambios de observación en la conducta de los alumnos, enfocándose a la reproducción de patrones de conducta de manera que estos se ejecutan de manera automática.

Piaget sugiere que el desarrollo cognitivo depende sobre todo de sus acciones y concibe los periodos de desarrollo de una forma bastante rígida. Cuando está aprendiendo existe interés en la mente de los alumnos, además ejercen en los procesos más complejos osea interesan a la investigación relacionada a la vida cotidiana.

El énfasis se localiza en promover el procesamiento mental también en la cual se acentúa los procesos de pensamiento más complejos, como la solución de problemas, la formación de conceptos del procesamiento de información.
David Ausubel distingue entre:

a) Aprendizaje receptivo y Aprendizaje por descubrimiento,
b) Aprendizaje mecánico y aprendizaje significativo.

2.2.2.2.1. Aprendizaje receptivo. El alumno recibe el contenido y lo internaliza además el alumno cuando recibe los contenidos, aprende un poco más rápido y su habilidad es mejor y es creativo en las tareas que les manda a realizar y aplica de una manera excelente.

2.2.2.2.2. Aprendizaje por descubrimiento. El alumno descubre por si mismo el material y después lo incorpora a la estructura cognitiva, además el alumno cada vez que investiga de la realidad aprende muchas cosas de la vida diaria y en la clase capta los contenidos más rápido y tiene una habilidad psicológica mejor.

La perspectiva del aprendizaje por descubrimiento, desarrollada por J. Bruner, atribuye una gran importancia a la actividad directa de los estudiantes sobre la realidad de la vida real.

2.2.2.2.3. Aprendizaje mecánico. El alumno aprende por asociaciones arbitrarias.

2.2.2.2.4. Aprendizaje significativo. El alumno relaciona la información nueva con estructura cognitiva, asimismo el alumno cuando recolecta información formula con más facilidad la palabras u oraciones. (D. Ausubel, J. Novak) postula que el aprendizaje debe ser significativo, no memorístico, y para ello los nuevos conocimientos deben relacionarse con los saberes previos que posea el aprendiz.

- **Cognitivismo.-** La psicología cognitivista (Merrill, Gagné.), basada en las teorías del procesamiento de la información y recogiendo también algunas ideas conductistas (refuerzo, análisis de tareas) y del aprendizaje significativo.

- **Constructivismo.-** Jean Piaget propone que para el aprendizaje es necesario un desfase óptimo entre los esquemas que el alumno ya posee y el nuevo conocimiento que se propone. "Cuando el objeto de conocimiento está alejado de los esquemas que dispone el sujeto, este no podrá atribuirle significación alguna y el proceso de enseñanza/aprendizaje será incapaz de desembocar". Sin embargo, si el conocimiento no presenta resistencias, el alumno lo podrá agregar a sus esquemas con un grado de motivación y el proceso de enseñanza/aprendizaje se lograra correctamente.

- **Socio constructivismo.-** Vygotsky, considera también los aprendizajes como un proceso personal de construcción de nuevos conocimientos a partir de los saberes previos (actividad instrumental), pero inseparable de la situación en la que se produce, también el aprendizaje es un proceso que está íntimamente relacionado con la sociedad. Y los alumnos cuando analizan la vida real es en lo que se enfoca para aprender de los contenidos.

2.2.3. TEORÍA DEL PROCESAMIENTO DE LA INFORMACIÓN:

- **Teoría del procesamiento de la información**. Influida por los estudios cibernéticos de los años cincuenta y sesenta, presenta una explicación sobre los procesos internos que se producen durante el aprendizaje.

- **Conectivismo.** Pertenece a la era digital, ha sido desarrollada por George Siemens que se ha basado en el análisis de las limitaciones del conductismo, el cognitivismo y el constructivismo, para explicar el efecto que la tecnología ha tenido sobre la manera en que actualmente vivimos, nos comunicamos y aprendemos.

2.2.4. TEORÍA CONSTRUCTIVISTA

La teoría constructivista sustenta que el aprendizaje es fundamental dinámico, es una guía que mantiene a una persona, tanto en los aspectos cognitivos, sociales y expresivos de la conducta.

El constructivismo, dice Méndez (2002) “es en primer lugar una epistemología, es decir una teoría que intenta explicar cuál es la naturaleza del conocimiento humano”(Parica, 2005). El constructivismo asume que la apariencia aparece de nada, que el conocimiento desde nacimiento de un conocimiento diferente nuevo, además es una obra propia que va produciendo día a día en la vida.

El enfoque constructivista requiere que el alumno sea estudiado, teniendo en cuenta su personalidad y de esta forma construir al individuo de acuerdo a sus necesidades, su medio ambiente y sus disposiciones internas, ya que cada persona es formada y moldeada por el proceso de asociación y estímulos, por eso el aprendizaje se realiza de forma automática y no con la pedagogía tradicional donde el profesor es quien marca las pautas para el aprendizaje de sus alumnos, el docente en esta pedagogía se caracteriza por ser autoritario, inflexible y no toma en cuenta las características o necesidades de sus alumnos.

Para mencionar la evaluación debe considerarse como un proceso integral, sistemático y pulcro. Donde se pueda valorar de acuerdo a su comportamiento los cambios experimentados en los alumnos en sus proyectos pedagógicos, y también si las técnicas aplicadas son eficientes y de esta manera obtener los resultados esperados.

Por lo antes mencionado se realiza las siguientes propuestas:

- Permitirle al alumno desarrollar su forma natural, es decir, su mayor espontaneidad y libertad, para conocer mejor sus necesidades.
- Al momento de realizar los proyectos dejar que decidan en que quieren trabajar y facilitarle la libre expresión y con ello su desarrollo interior.
- Elaborar las propuestas de aprendizaje de acuerdo a sus propias experiencias para obtener los resultados buscados.
- Plantearle situaciones donde se vean obligados a reflexionar dicha situación en base a sus experiencias y los apliques para la solución de sus problemas.

- Presentarle un ambiente donde despliegue su interioridad y de esta manera facilite el desenvolvimiento espontáneo y el docente lo apoye cuando lo necesite.

2.2.5. PROCESO ENSEÑANZA-APRENDIZAJE

Enseñanza y aprendizaje forman parte de un único proceso que tiene como fin la formación del estudiante. En esta sección se describe dicho proceso apoyándonos en la referencia.
La referencia etimológica del término enseñar puede servir de apoyo inicial: enseñar es señalar algo a alguien. No es enseñar cualquier cosa; es mostrar lo que se desconoce.

Esto implica que hay un sujeto que conoce (el que puede enseñar), y otro que desconoce (el que puede aprender). El que puede enseñar, quiere enseñar y sabe enseñar (el profesor); El que puede aprender quiere y sabe aprender (el alumno). Ha de existir pues una disposición por parte de alumno y profesor.

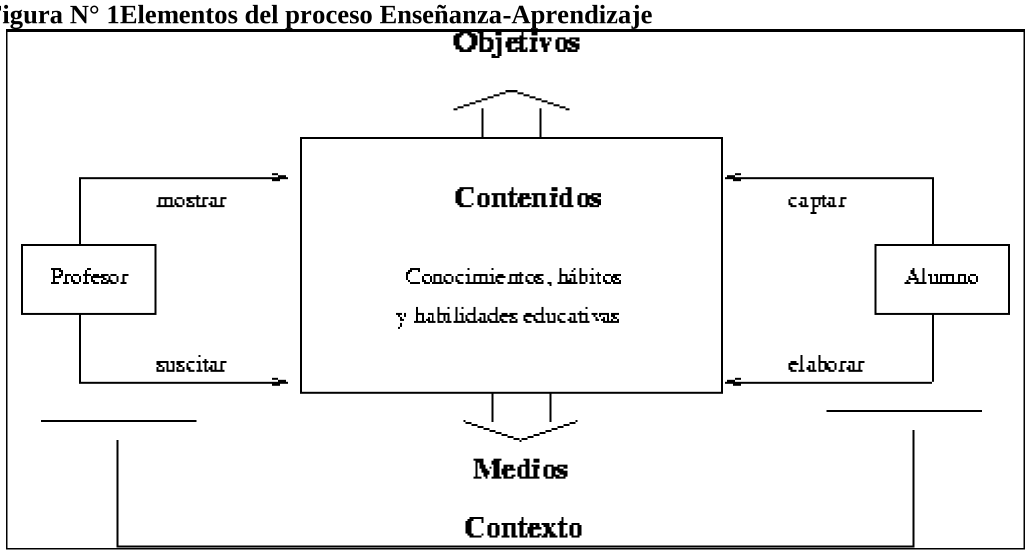
Aparte de estos agentes, están los contenidos, esto es, lo que se quiere enseñar o aprender (elementos curriculares) y los procedimientos o instrumentos para enseñarlos o aprenderlos (medios).

Cuando se enseña algo es para conseguir alguna meta (objetivos). Por otro lado, el acto de enseñar y aprender acontece en un marco determinado por ciertas condiciones físicas, sociales y culturales (contexto).
La flexibilidad en el uso del ciclo del aprendizaje puede servir como una guía para planificar una unidad de estudio que se implementa en varios periodos de clase. Se inicia con una experiencia y se termina, dando a los alumnos la oportunidad de aplicar los nuevos conceptos y destrezas que han adquirido en la generación de nuevas experiencias.
Sin embargo, en el proceso de pasar por el ciclo, al llegar a la fase de la conceptualización, se puede descubrir que hay varios conceptos que hay que

comunicar y que es importante estimular el interés de los alumnos en cada uno de ellos y darle cierta oportunidad de consolidar el conocimiento de cada uno antes de pasar al próximo. Por lo tanto, puede ser que después de presentar cada concepto, se decida realizar algunos ejercicios de aplicación, tomando en cuenta, según el caso, tanto las aplicaciones estructuradas como las aplicaciones creativas. En el forma parecida, para introducir algunos conceptos, puede ser conveniente iniciar con un ejercicio de reflexión e intercambio de ideas, basado en los conocimientos y experiencias de la vida diaria de los alumnos. Así en la práctica, el progreso a través del ciclo no siempre sigue paso a paso sin interrupción. Más bien, después de la aplicación de un concepto, se puede volver al paso de la reflexión o de la conceptualización, para introducir otro concepto. Posteriormente, cuando los alumnos ya alcanzaron cierto dominio de todos y cada uno de los conceptos o destrezas que corresponden a la unidad de estudio, se pasa a la aplicación original de lo estudiado y a la evaluación. (Penteado Junior, 1858)

2.2.5.1. ELEMENTOS DEL PROCESO ENSEÑANZA-APRENDIZAJE

Figura N° 1Elementos del proceso Enseñanza-Aprendizaje



Fuente: http://www.infor.uva.es/~descuder/docencia/pd/node24.html

De acuerdo con lo expuesto, podemos considerar que el proceso de enseñar es el acto mediante el cual el profesor muestra o suscita contenidos educativos (conocimientos, hábitos, habilidades) a un alumno, a través de unos medios, en función de unos objetivos y dentro de un contexto.

El proceso de aprender es el proceso complementario de enseñar. Aprender es el acto por el cual un alumno intenta captar y elaborar los contenidos expuestos por el profesor, o por cualquier otra fuente de información, él lo alcanza a través de unos medios (técnicas de estudio o de trabajo intelectual).

Este proceso de aprendizaje es realizado en función de unos objetivos, que pueden o no identificarse con los del profesor y se lleva a cabo dentro de un determinado contexto.
Para (Gagné1987) el aprendizaje es el cambio de una capacidad o disposición humana que persiste durante cierto tiempo y no pude ser explicado a través de los procesos de maduración. Este tipo de cambio sucede en la conducta diferenciándose de que el resultado se logra solamente a través del aprendizaje, las actitudes, el interés, el valor y también en el cambio de conductas.

2.2.5.2. ENFOQUE CONSTRUCTIVISTA DEL APRENDIZAJE

Figura N° 2Enfoque Constructivista del Aprendizaje

Fuente: www.Teorias aprendizaje-cuadros comparativos.pdf

Toma como plataforma la actividad mental, en razón del alcance de aprendizajes significativos; así el estudiante puede llegar a la comprensión y funcionalidad de lo cultivado para construir, modificar, diversificar y coordinar sus esquemas.

Estableciendo de esta manera redes de significados enriqueciendo su juicio del medio físico, social, político y favoreciendo su evolución personal; la guía del profesor contribuirá a abrir la capacidad de realizar aprendizajes significativos por sí mismo, en todas las circunstancias que se puedan dar, o lo que es lo mismo inducirlo a “aprender a aprender”.

Aquí parece haber una contradicción por una parte, al considerar al alumno como el único forjador y responsable del proceso de aprendizaje y, por la otra el hecho de atribuirle al profesor una importancia decisiva como orientador, guía y facilitador de la enseñanza, donde es importante su presencia en la selección de actividades, la organización, toma de decisiones y aplicación de métodos para alcanzar aprendizajes significativos.

Considerando la intervención de éste, promotora y facilitadora en el proceso de construcción, modificación, diversificación y enriquecimiento progresivo de los esquemas de reflexión de los estudiantes, en la actividad auto estructurante, de la construcción del conocimiento y por lo tanto del aprendizaje significativo.

La intervención pedagógica vislumbrada la necesidad de instaurar una comunicación eficaz con la situación compartida; asumiendo la organización con ciertas metodologías para crear esa comunicación; para esto es imperioso entablar una negociación con los estudiantes, crear una definición intersubjetiva de la situación que obedezca a la utilización apropiada de mediación del lenguaje.

2.2.5.3. CARACTERÍSTICAS DEL MAESTRO Y ESTUDIANTE CONSTRUCTIVISTA

Constructivismo tiene como fin que el estudiante construya su propio aprendizaje, por lo tanto, según (Maya, 1996)asegura que el maestro en su rol de mediador debe apoyar al educando para:

- Enseñarle a pensar: Desarrollar en el alumno un conjunto de habilidades cognitivas que les permitan optimizar sus procesos de razonamiento.

- Enseñarle sobre el pensar: Animar a los alumnos a tomar conciencia de sus propios procesos y estrategias mentales (metacognición) para poder controlarlos y modificarlos (autonomía), mejorando el rendimiento y la eficacia en el aprendizaje.

- Enseñarle sobre la base del pensar: Quiere decir incorporar objetivos de aprendizaje relativos a las habilidades cognitivas, dentro del currículo escolar.

El papel del maestro desde la perspectiva constructivista, se orienta bajo la figura de guía y "provocador" de situaciones de aprendizaje, en las que el participante dude de sus propias ideas y sienta la necesidad de buscar nuevas explicaciones, nuevos caminos que vuelvan a satisfacer esos esquemas mentales, los cuales, han sido configurados por la interacción con su medio natural y social. Además el maestro desde este enfoque debe orientarse a:

- Parte de lo que el educando puede y lo alienta, lo escucha, orienta y motiva.
- Trabaja para la autoformación más que para corregir.
- Ofrece un equilibrio entre estímulo y autoridad.
- Motivar el respeto mutuo.
- El rol del profesor es ser un facilitador que guía al alumno a organizar y establecer relaciones de contenidos. Esto implica que el contenido debe ser

relevante, novedoso, funcional y bien estructurado para que pueda ser memorizado y aprendido de manera comprensiva y no mecánica.

- Diagnostica permanentemente el estado emocional, el nivel cognoscitivo y los intereses del alumno.
- Usa terminología cognitiva tal como: Clasificar, analizar, predecir, crear, inferir, deducir, estimar, elaborar, pensar.
- Fortalece el razonamiento.
- Desafía la indagación haciendo preguntas que necesitan respuestas muy bien reflexionadas y desafía también a que se hagan preguntas entre ellos.
- Garantiza un continuo desafío, para que el alumno, a partir de la desequilibración, construya nuevas estructuras intelectuales.
- Es promotor de la autonomía intelectual y moral de los alumnos.
- El profesor luego de facilitar puentes entre lo previo y lo nuevo, ofrece estructuras y estrategias que le permiten al alumno aprender de manera cada vez más autónoma, interactiva y bajo su propio control.

Por otro lado, se asegura que el rol del estudiante Constructivista debe considerarse como:

- Es un sujeto constructor activo de su propio conocimiento.
- Debe estar motivado y construye conocimiento al dar sentido a los conceptos a partir de su relación con estructuras cognoscitivas y experiencias previas. Es decir, que el alumno es responsable de su proceso de aprendizaje porque está en permanente actividad mental no solo cuando descubre y experimenta sino también cuando escucha al profesor.
- Se propicia la interacción entre alumno y profesor. Propone soluciones.
- Debe estar activo y comprometido. Aprende y participa proponiendo y defendiendo sus ideas.
- El aprendiz selecciona y transforma información, construye hipótesis y toma decisiones basándose en una estructura cognitiva.
- El sujeto posee estructuras mentales previas que se modifican a través del proceso de adaptación.

2.2.5.4. VENTAJAS Y DESVENTAJAS DE ENFOQUE CONSTRUCTIVISTA

a) VENTAJAS

- Promueve la autonomía en los alumnos.
- Generan procesos de interacción, planificación y evaluación participativos.
- Son flexibles, dinámicos y se educan a las necesidades del grupo.
- Permite la interacción y la coparticipación en el proceso de aprendizaje entre alumnos que se encuentren en puntos geográficos alejados o remotos.
- Propicia el desarrollo de las destrezas del pensamiento, la interdisciplinariedad y el trabajo cooperativo.

b) DESVENTAJAS

- Los alumnos deben reducirse a una construcción subjetiva de algo que está en proceso de dejar de ser y existir en un futuro inmediato.
- Lo anterior incide en la preferencia de los constructivistas por estudiar los problemas y no los contenidos.
- Dificulta la organización de un plan de educación masiva y la evaluación, ya que cada alumno se organiza con su propio ritmo de aprendizaje.

- Piaget propuso que el conocimiento es una interpretación activa de los datos dela experiencia por medio de estructuras o esquemas. Influido por la biología evolucionista, consideró estas estructuras no como algo fijo e invariable, sino que éstas evolucionan a partir de las funciones básicas de la asimilación y la acomodación.

Por su parte (Vigotsky, 1979) considera que el desarrollo humano es un proceso de desarrollo cultural. Así, el proceso de formación de las funciones psicológicas superiores se da a través de la actividad práctica e instrumental, pero no individual, sino en la interacción o cooperación social.

El concepto constructivista se funda en tres nociones fundamentales:

- El alumno es el responsable de su propio proceso de aprendizaje. Es él quien construye el conocimiento, quien aprende. La enseñanza se centra en la actividad mental constructiva del alumno, no es sólo activo cuando manipula, explora, descubre o inventa, sino también cuando lee o escucha.

- La actividad mental constructiva del alumno se aplica a los contenidos que ya posee en un grado considerable de elaboración.

- El alumno, reconstruye objetos de conocimiento que ya están construidos. Por ejemplo, los alumnos construyen.

- Proceso de aprendizaje del sistema de la lengua escrita, pero este sistema ya está elaborado; lo mismo sucede con las operaciones algebraicas, con el concepto de tiempo histórico, y con las normas de relación social.

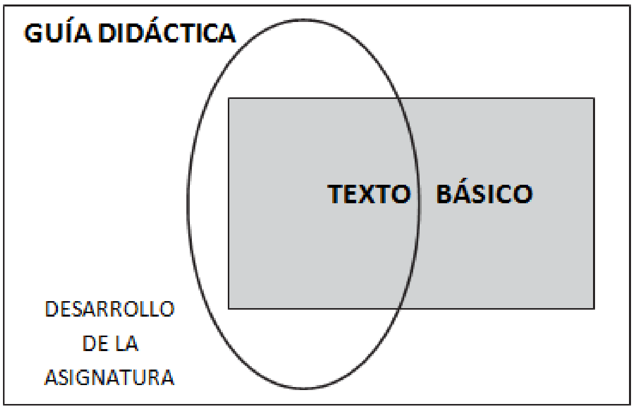
El constructivismo sostiene que el aprendizaje es esencialmente activo, del mismo modo una persona que aprende algo diferente lo concentra a sus conductas previas y a sus propias organizaciones intelectuales, cada nuevas experiencias es relacionada y depositada en una red de conocimiento y experiencias que existen previamente en el sujeto, como en los resultados, el aprendizaje no es pasivo ni justo, por el opuesto es un proceso individual que cada persona va cambiando firmemente a la luz de sus experiencias (Abbott & Ryan, 1999)Además es un enfoque comunicado por diferentes disposiciones de la investigación psicológica y educativa.

2.2.6. GUÍA DIDÁCTICA

La guía didáctica es un documento, instrumento (digital o impreso) con orientación técnica para el alumno, que incluye toda la información necesaria para el uso y manejo beneficioso de los elementos y actividades que conforman la materia incluyendo las actividades de aprendizaje y de estudio independiente de los contenidos es decir que la Guía Didáctica es un material educativo diseñado para orientar paso a paso el proceso de aprendizaje.

Si observa con atención el gráfico siguiente, con seguridad podrá descubrir el concepto de Guía Didáctica.

Figura N° 3GUÍA DIDÁCTICA



Fuente: http://www.biblioteca.org.ar/libros/142124.pdf

Partiendo de estas concepciones, debemos tener en cuenta las definiciones para (García, 2002)La Guía Didáctica es “el documento que orienta el estudio, acercando a los procesos cognitivos del alumno el material didáctico, con el fin de que pueda trabajarlos de manera autónoma”.

(Mercer, 1998) la define como la “Herramienta que sirve para edificar una relación entre el profesor y los alumnos”.

(Castillo, 1999) complementa la definición anterior al afirmar que la Guía Didáctica es “una comunicación intencional del profesor con el alumno sobre los pormenores del estudio de la asignatura y del texto base”.

Para (Martínez, 1988)“constituye un instrumento fundamental para la organización del trabajo del alumno y su objetivo es recoger todas las orientaciones necesarias que le permitan al estudiante integrar los elementos didácticos para el estudio de la asignatura".

Esto nos permitirá sostener que la Guía Didáctica es el material educativo que deja de ser auxiliar, para convertirse en herramienta valiosa de motivación y apoyo; pieza clave para el desarrollo del proceso de enseñanza, porque promueve el aprendizaje autónomo al aproximar el material de estudio al alumno (texto convencional y otras fuentes de información), a través de diversos recursos didácticos como: explicaciones, ejemplos, comentarios, esquemas, gráficos, estudio de casos y otras acciones similares a las que el profesor utiliza en clase.

Algunas razones para elaborar una Guía Didáctica podrían ser:

- La dificultad de conseguir en el mercado un texto que desarrolle íntegramente los contenidos de la asignatura; de ahí la necesidad de organizar, profundizar, aclarar, comentar y completar temas.

- Los textos de mercado, por lo general, requieren adaptación al contexto en que se desarrolla la acción formativa ya sea en ejemplos o en datos estadísticos, etc.

- La necesidad de integrar en un solo documento las bondades: de las guías de lectura, cuadernillos de ejercicios, autoevaluaciones, orientaciones y demás estrategias que conduzcan al alumno aprender con éxito de forma autónoma.

2.2.6.1. FUNCIONES BÁSICAS DE LA GUÍA DIDÁCTICA

La Guía Didáctica cumple diversas funciones, que van desde sugerencias para abordar el texto básico, hasta acompañar al alumno en su estudio en soledad. Cuatro son los ámbitos en los que se podría agrupar las diferentes funciones:

a. Función motivadora:

- Despierta el interés por la asignatura y mantiene la atención durante el proceso de auto estudio.
- Motiva y acompaña al estudiante a través de un dialogo.(Holmberg, 1985)

b. Función facilitadora de la comprensión y activadora del aprendizaje:

- Propone metas claras que orientan el estudio de los alumnos.
- Organiza y estructura la información del texto básico.
- Vincula el texto básico con los demás materiales educativos seleccionados para el desarrollo de la asignatura.
- Completa y profundiza la información del texto básico.
- Sugiere técnicas de trabajo intelectual que faciliten la comprensión del texto y contribuyan a un estudio eficaz (leer, subrayar, elaborar esquemas, desarrollar ejercicios).
- "Suscita un diálogo interior mediante preguntas que obliguen a reconsiderarlo estudiado" (Marín Ibáñez, 1999)

Sugiere distintas actividades y ejercicios, en un esfuerzo por atender los distintos estilos de aprendizaje.

- Aclara dudas que previsiblemente pudieran obstaculizar el progreso en el aprendizaje.
- "Incita a elaborar de un modo personal cuanto va aprendiendo, en un permanente ejercicio activo de aprendizaje" (Marín Ibáñez, 1999)
- Especifica estrategias de trabajo para que el alumno pueda realizar sus evaluaciones.

c. Función de orientación y diálogo:

- Fomenta la capacidad de organización y estudio sistemático.
- Promueve la interacción con los materiales y compañeros.

- Anima a comunicarse con el profesor-tutor.
- Ofrece sugerencias oportunas para posibilitar el aprendizaje independiente.

d. Función evaluadora:

- "Activa los conocimientos previos relevantes, para despertar el interés e implicar a los estudiantes". (Martínez, 1988)
- Propone ejercicios recomendados como un mecanismo de evaluación continua y formativa.
- Presenta de autocomprobación del aprendizaje (autoevaluaciones),para que el alumno controle sus progresos, descubra vacíos posibles y se motive a superar las deficiencias mediante el estudio.
- Realimenta constantemente al alumno, a fin de provocar una reflexión sobre su propio aprendizaje.
- Especifica los trabajos de evaluación.

2.2.6.1.1. ESTRUCTURA DE UNA GUÍA DIDÁCTICA.

Las guías permiten dar pautas para el desarrollo de actividades educativas, es un instrumento que facilita el desarrollo de destrezas cognitivas psicomotrices y afectivas a la vez que se estudia el contenido de los temas, fomentando el trabajo individual y grupal con responsabilidad para el cumplimiento delas actividades.

Según Contreras Lara Vega M. E. los componentes básicos de una guía didáctica que posibilitan sus características y funciones son los siguientes:

a) Índice.

En él debe consignarse todos los títulos. Ya sea de 1°, 2° o 3° nivel, y su correspondencia página para que como cualquier texto el destinatario pueda ubicarlos rápidamente.

b) Presentación

Antecede al cuerpo del texto y permite al autor exponer el propósito general de su obra, orientar la lectura y hacer consideraciones previas que consideran útiles para la comprensión de los contenidos de la guía.

c) Objetivo general.

Permite identificar el conocimiento, las habilidades, las actitudes y las aptitudes. O bien las competencias que el estudiante debe desarrollar, a fin de orientar el aprendizaje.

a) Objetivos específicos

La selección de contenidos y forma de presentación que puede adoptar un autor debe estar orienta siempre por la definición previa de objetivos explicativos.

b) Esquema-resumen de contenidos

Presentar en forma esquemática y resumida al estudiante, en un solo ”golpe de vista”, todos los puntos fundamentales de que consta el tema correspondiente facilitando así su acceso o bien su reforzamiento.

c) Temática de estudio.

Los contenidos básicos se presentan a manera de sumario o bien de esquema según sea el caso, con la intención de exponer de manera concisa y representativa, los temas y subtemas correspondientes a las lecturas.

d) Técnicas de integración.

En el desarrollo del curso se implementaran diversas técnicas para la integración y fortalecimiento del aprendizaje.

e) Lecturas.

Se establece las referencias bibliográficas de las lecturas que habrá de hacerse.

f) Actividades para el estudiante.

Una vez presentados os nuevos contenidos, es indispensable incluir actividades para que el estudiante trabaje y actué sobre los contenidos presentados, a fin de desarrollar las competencias o capacidades planteadas en los objetivos generales y específicos.

g) Ejercicios de autoevaluación.

Tiene como propósito ayudar al estudiante a que se evalué por si mismo, en lo que respecta a la comprensión y trasformación del contenido del tema.

h) Recomendaciones y consideraciones finales.

El método de estudio que puede emplear.
La asignación de tiempos destinados al estudio.
Las técnicas didácticas a utilizar en el curso. Entre otros.

i) Bibliografía de apoyo y fuentes información.

Ne se debe olvidar la pertinencia, especialmente en sistemas con esta modalidad, de proponer bibliografía tanto básica como complementaria

j) Glosario

Las funciones del glosario es proporcionar a los estudiantes definiciones precisas ceñidas a su utilización en el contexto de la asignatura, de conceptos claves necesario para la comprensión de los contenidos.

2.2.6.2. DISEÑO DE LA GUÍA DIDÁCTICA

Cada una de las guías didácticas tienen un diseño similar en las se puede describir los siguientes componentes.

a) Enunciado del tema.

De cada unidad se ha seleccionado un tema que comprenderá tanto de la información teórica como las orientaciones didácticas.

b) Objetivos.

Son objetivos realizable se desarrollan en el transcurso del tema de estudio

c) Contenidos.

Es la presentación de lo que se trata de enseñar a los estudiantes. Se encuentra detallado en temas y subtemas que serán estudios durante la investigación.

d) Proceso didáctico.

Dentro de la metodología se aplican los métodos: inductivo deductivo y sintético.

2.2.7. TRIGONOMETRÍA

La palabra TRIGONOMETRÍA proviene del griego Trigonom: triángulo y Metrón: medida. Entonces significa “Medidas del triángulo” (D ámore, 1999)

Desde sus orígenes, la TRIGONOMETRÍA estudia las relaciones entre los lados y los ángulos de los triángulos como así también las propiedades y las aplicaciones de las funciones trigonométricas de ángulos. (Maldonado, 2005)

2.2.7.1. HISTORIA DE LA TRIGONOMETRÍA

La historia de la trigonometría se remonta a las primeras matemáticas conocidas, en Egipto y Babilonia. Los egipcios establecieron la medida de los ángulos en grados, minutos y segundos. Sin embargo, hasta los tiempos de la Grecia clásica no empezó a haber trigonometría en las matemáticas. En el siglo II a.C. el astrónomo Hiparco de Nicea compiló una tabla trigonométrica para resolver triángulos. Comenzando con un ángulo de 71° y yendo hasta 180 °C con incrementos de 71°, la tabla daba la longitud de la cuerda delimitada por los lados del ángulo central dado que corta a una circunferencia de radio r. Esta tabla es similar a la moderna tabla del seno. No se sabe con certeza el valor de r utilizado por Hiparco, pero sí se sabe que 300 años más tarde el astrónomo Tolomeo utilizó r = 60, pues los griegos adoptaron el sistema numérico sexagesimal (base 60) de los babilonios.

Tolomeo incorporó en su gran libro de astronomía, el Almagesto, una tabla de cuerdas con incrementos angulares de 1°, desde 0° a 180°, con un error menor que 1/3.600 de unidad. También explicó su método para compilar esta tabla de cuerdas, y a lo largo del libro dio bastantes ejemplos de cómo utilizar la tabla para calcular los elementos desconocidos de un triángulo a partir de los conocidos. Tolomeo fue el autor del que hoy se conoce como teorema de Menelao para resolver triángulos esféricos, y durante muchos siglos su trigonometría fue la introducción básica para los astrónomos. Quizás al mismo tiempo que Tolomeo los astrónomos de la India habían desarrollado también un sistema trigonométrico basado en la función seno en vez de cuerdas como los griegos. Esta función seno, al contrario que el seno utilizado en la actualidad, no era una proporción, sino la longitud del lado opuesto a un ángulo en un triángulo rectángulo de hipotenusa dada. Los matemáticos indios utilizaron diversos valores para ésta en sus tablas.

A finales del siglo VIII los astrónomos árabes habían recibido la herencia de las tradiciones de Grecia y de la India, y prefirieron trabajar con la función seno. En las últimas décadas del siglo X ya habían completado la función seno y las otras cinco funciones y habían descubierto y demostrado varios teoremas fundamentales de la trigonometría tanto para triángulos planos como esféricos. Varios matemáticos sugirieron el uso del valor r = 1 en vez de r = 60, lo que produjo los valores modernos de las funciones trigonométricas. Los árabes también incorporaron el triángulo polar en los triángulos esféricos. Todos estos descubrimientos se aplicaron a la astronomía y también se utilizaron para medir el tiempo astronómico y para encontrar la dirección de la Meca, lo que era necesario para las cinco oraciones diarias requeridas por la ley islámica. Los científicos árabes también compilaron tablas de gran exactitud. Por ejemplo, las tablas del seno y de la tangente, construidas con intervalos de 1/60 de grado (1 minuto) tenían un error menor que 1 dividido por 700 millones. Además, el gran astrónomo Nasir al-Dìn al-Tusì escribió el Libro de la figura transversal, el primer estudio de las trigonometrías plana y esférica como ciencias matemáticas independientes.

El occidente latino se familiarizó con la trigonometría árabe a través de traducciones de libros de astronomía arábigos, que comenzaron a aparecer en el siglo XII. El primer trabajo importante en esta materia en Europa fue escrito por el matemático y astrónomo alemán Johann Müller, llamado Regiomontano. Durante el siguiente siglo, el también astrónomo alemán Georges Joachim, conocido como Rético, introdujo el concepto moderno de funciones trigonométricas como proporciones en vez de longitudes de ciertas líneas. El matemático francés François Viète incorporó el triángulo polar en la trigonometría esférica y encontró fórmulas para expresar las funciones de ángulos múltiples, sennq y cosnq, en función de potencias de senq y cosq.

Los cálculos trigonométricos recibieron un gran empuje gracias al matemático escocés John Napier, quien inventó los logaritmos a principios del siglo XVII. También encontró reglas mnemotécnicas para resolver triángulos esféricos, y algunas proporciones (llamadas analogías de Napier) para resolver triángulos esféricos oblicuos.

Casi exactamente medio siglo después de la publicación de los logaritmos de Napier, Isaac Newton inventó el cálculo diferencial e integral. Uno de los fundamentos del trabajo de Newton fue la representación de muchas funciones matemáticas utilizando series infinitas de potencias de la variable x. Newton encontró la serie para el sen x y series similares para el cos x y la tg x. Con la invención del cálculo las funciones trigonométricas fueron incorporadas al análisis, donde todavía hoy desempeñan un importante papel tanto en las matemáticas puras como en las aplicadas.(Función trigonométrica.1996)

2.2.7.2. LA ENSEÑANZA DE LA TRIGONOMETRÍA.

Romper con el paradigma de lo tradicional, apropiarse de las herramientas tecnológicas que aportan innovaciones en el proceso de enseñanza, es redimensionar el proceso educativo, integrando a la clase todo aquello de lo que se pueda beneficiar, para convertir el aula en un auténtico elemento generador de aprendizaje. La escuela, un emblema en la sociedad, se halla sumergida en un proceso de transformaciones, enmarcada en el conjunto de evoluciones mundiales auspiciadas por el auge de las nuevas tecnologías, por las alteraciones en las relaciones sociales y por una nueva percepción de las relaciones tecnología-sociedad que establecen las relaciones tecnología-educación. Cada periodo histórico ha establecido sus propias escuelas, adecuando los procesos educativos a las circunstancias.

En la actualidad esta adaptación admite mutaciones en los modelos educativos, cambios en los usuarios de la formación y transformaciones en los escenarios donde ocurre el aprendizaje. Este conjunto de cambios, se observa detalladamente en el escenario educativo, allí donde se desenvuelven los procesos de aprendizaje. La aparición de medios tales como el computador, la televisión, el video, entre otros, ha afectado la forma en que el individuo aprende. Sin embargo el uso de estos medios no ha afectado abismal y masivamente a la institución educativa ya que los procesos de enseñanza-aprendizaje que se desarrollan, parecen presentar cierta rigidez para una futura educación y requieren para ello ciertas adaptaciones.

De manera que frente a la provocación de encarar proyectos que impliquen el uso de la informática como medio de aprendizaje en la escuela, resulta esencial evaluar la mencionada problemática en la que se dilucida el establecimiento. La función de las instituciones educativas, es la de instruir a las nuevas generaciones mediante la transferencia del bagaje cultural de la sociedad, viabilizando la inserción social y laboral de los educandos; es un medio facilitador de nuevos aprendizajes e invenciones, favoreciendo la recreación de los conocimientos. La escuela proyecta la cultura a medida que cambia y prepara a los alumnos para que participen eficientemente en un esfuerzo continuado por lograr mejores maneras de vida. Cada individuo aprende de una manera específica y única, la computadora facilita el proceso de aprendizaje, en 16 este aspecto. Desde lo epistémico, su importancia reside fundamentalmente en que es un medio didáctico más, al igual que los restantes de los que dispone el docente en clase, el cual permite programar tareas según los distintos niveles de los escolares, sin implicar el ritmo general de la clase.

De ahí que los maestros deben estar listos para brindar a los estudiantes con el poder de las ventajas que aporta la tecnología. Las IE, deben contar con profesores que estén interesados en su actualización en el manejo de nuevas tecnologías y de esta forma enseñar eficazmente los contenidos de las materias necesarias a la vez que incorporen estos medios como elementos facilitadores del aprendizaje. En la asignatura de matemáticas, suele ocurrir un fenómeno particular, siempre se han considerado al interior de los medios de enseñanza como la disciplina más exigente y sólo para "genios", a este hecho, muchos docentes han contribuido con sus "clichés", "estereotipos desgastados" y anacrónicas metodologías, que terminaron por sumir aún más en la oscuridad y la pérdida de interés por estas asignaturas. En la misma dirección se puede evidenciar cuando el educando trata de resolver ecuaciones y aburridas fórmulas; ante tan tedioso panorama él adopta "olvidar voluntariamente" estas asignaturas y recrearse en otras áreas, al menos donde se brinde la posibilidad del goce de pensar con mayor propiedad y los puntos de disertación y respuestas no sean tan "exactas".

Es innegable que convertir tales sesiones de "tormento intelectual", y reemplazarlas por espacios de menos rigor, donde el confuso laberinto de razonamientos fríos sea combinado con reflexiones y conclusiones propias, donde a través de elementos gráficos y animados se conceptualice y se disponga de elementos interactivos, tiene que darse otro tipo de respuesta al proceso de aprendizaje por un porcentaje mayor de estudiantes, interesados en conocer con más profundidad el movimiento rectilíneo, por decir algo, o la solución de un sistema de ecuaciones, mostrar la matemática desde la perspectiva de la informática, seguramente que la casuística estadística de los nuevos matemáticos y físicos, interesados en dichos temas se va a ver incrementado.

El artículo 67 de la Constitución Nacional argumenta que la educación impartida en el país debe ser de buen nivel, dejando entrever que el docente como instrumento del proceso de aprendizaje debe estar a la vanguardia de las últimas técnicas, que de una u otra forma incidan en el mejoramiento y desempeño de sus estudiantes. La calidad en la 17 educación, también está orientada en hacer individuos aptos en un esquema social, donde el individuo sea el eje de todo el proceso formativo. De igual forma, este artículo es enunciado en la Ley General de Educación, en su artículo 23, numeral 91 , al referirse a la enseñanza de la tecnología e informática como área fundamental. También ordena la ley que todas las áreas deben confluir en un mismo sentido, al pretender crear unidades de criterio donde se propenda por una educación integral, encaminada al cumplimiento de los fines educativos. Es de lógica elemental que áreas tan importantes como las matemáticas, se apropien de este importante recurso para fundamentar desde sus perspectivas y ampliar los horizontes del aprendizaje. En el decreto 1860/94, el cual reglamenta parcialmente la ley 115/94, en su artículo 44 hace mucho más explícita la necesidad de apropiación de las nuevas tecnologías:

“Los docentes podrán elaborar materiales didácticos para uso de los estudiantes con el fin de orientar su proceso formativo, en los que pueden estar incluidos instructivos sobre el uso de los textos del bibliobanco, lecturas, bibliografías, ejercicios, simulaciones, pautas de experimentación y demás ayudas. Los establecimientos educativos proporcionarán los medios necesarios para la producción y reproducción de estos materiales” (1Ministerio de Educación Nacional. Op. Cit. P. 19)

En igual sentido el artículo 45 del mismo decreto redefine el concepto de material y equipo educativo: “Se define como material o equipo educativo para los efectos legales y reglamentarios, las ayudas didácticas o medios que faciliten el proceso pedagógico”(2Ministerio de Educación Nacional. Decreto 1860 de 1994. El pensador, Bogotá 1996. P.232)

En el proceso educativo en cuanto a contenidos básicos en las áreas, según la resolución 2343/96, se establece claramente parámetros alcanzables en el área de informática, para ello el Ministerio ha dispuesto como elementos generales para la enseñanza de la misma y ha incluido una serie de pautas ajustadas perfectamente a lo que se quiere alcanzar con el presente trabajo: “Emplea los instrumentos tecnológicos de su entorno inmediato de acuerdo con la función tecnológica propia de cada una de ellas”(Ministerio de Educación Nacional Ibíd)

Por último, en el siglo XVIII, el matemático suizo “Leonard Euler” definió las funciones trigonométricas utilizando expresiones con exponenciales de números complejos. Esto convirtió a la trigonometría en sólo una de las muchas aplicaciones de los números complejos; además, Euler demostró que las propiedades básicas de la trigonometría eran simplemente producto de la aritmética de los números complejos.

2.2.7.1. IMPORTANCIA DE LA TRIGONOMETRÍA

1) La trigonometría se aplica a otras ramas de la geometría, como es el caso del estudio de las esferas, de la geometría, del espacio.

2) También son usadas en astronomía para medir distancias a estrellas próximas.

3) En la medición de distancia entre puntos geográficos, y en sistemas de navegación por satélites.

4) Ya que con esta parte de la materia que es Trigonometría podemos comprobar distancias y ángulos con respecto a un triángulo, pero en sentido de una imagen como lo podemos visualizar en el mundo real, tenemos dos ejemplos:

- Un caso de 2 personas que se trasladen a una montaña y desde su punto de origen observan que tienen un ángulo de inclinación menor y la distancia a la montaña es mayor se acercan y desde otro punto logran observar que su ángulo de visión se ha hecho más grande y la distancia para llegar a la montaña es menor.

- Ejemplo que me dio un profesor de una calle no recuerdo, pero en fin, esa es la idea también puedes observar y analizar objetos en el aire y distancias y ángulos de visión desde su punto hacia otro...tienes que tratar de darle un sentido a todas esas materias.

2.3. FUNDAMENTACIÓN CONCEPTUAL

2.3.1. DEFINICIONES DE TÉRMINOS

Aprendizaje.- El aprendizaje es una de las funciones mentales más importantes en humanos, animales y sistemas artificiales.

Aprendizaje significativo.- Este concepto y teoría están enmarcados en el marco de la psicología constructivista.

Constructivismo.- El constructivismo en pedagogía se aplica como concepto didáctico en la enseñanza orientada a la acción.

Didáctica.- Son las diversas técnicas y formas de enseñar, las cuales se adaptan según las necesidades de los alumnos o las circunstancias. Es el arte de enseñar.

Relevante.- Sobresaliente, destacado.

Cognitiva.- Perteneciente o relativo al conocimiento.

Estrategias.- En un proceso regulable, conjunto de las reglas que aseguran una decisión óptima en cada momento.

Pulcro.- Delicado, esmerado en la conducta y el habla.

Interioridad.- Cosas privativas, por lo común secretas, de las personas, familiares o corporaciones.

Provocador.- Que trata de originar actos o movimientos sediciosos.

Perspectiva.-	Arte que enseña el modo de representar en una superficie los objetos, en la forma y disposición con que aparecen a la vista.
Espontaneidad.-	Expresión natural y fácil del pensamiento.
Guía.-	Aquello que dirige o encamina.
Educativo.-	Que educa o sirve para educar.
Trigonometría.-	Matemáticas cálculo de los elementos de un triángulo definido por datos numéricos.

2.4. SISTEMATIZACIÓN DE VARIABLES

2.4.1. VARIABLE INDEPENDIENTE

- Guía Didáctica con enfoque constructivista.

2.4.2. VARIABLE DEPENDIENTE

- Aprendizaje de la trigonometría.

CAPÍTULO III

3. MARCO METODOLÓGICO

1.1. MÉTODOS DE LA INVESTIGACIÓN.

a.- **Método inductivo.**

Porque la investigación se orienta a conocer un problema de los estudiantes, para luego encontrar soluciones que serán en beneficio de los mismos.

b.- **Método analítico y sintético.** Permitió realizar un análisis crítico y reflexivo centrado en los datos obtenidos de la encuesta aplicada a los estudiantes, para luego realizar su respectiva interpretación relacionando los aspectos más relevantes entre la pregunta y el marco teórico para concluir con la determinación de las conclusiones y recomendaciones respecto al trabajo de investigación.

3.1.1. TIPO DE INVESTIGACIÓN

a. Investigación diagnóstica o propositiva: Se utiliza la investigación diagnóstica o propositiva ya que genera conocimientos a partir de la labor de cada uno de los integrantes del grupo de investigación, propendiendo además por el desarrollo, el fortalecimiento y el mantenimiento de estos colectivos con el fin de alcanzar altos niveles de productividad. Y la necesidad de solucionar problemas pertinentes a nivel local y global.

3.1.2. DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN

a. **De campo**. Se ejecutó en el propio lugar de los hechos estos es la aplicación de las encuesta a los estudiantes de Tercer Semestre de la Facultad de Ciencias de la Educación Humanas y Tecnológicas de la Escuela de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional de Chimborazo.

b. **Bibliográfica.** Para el desarrollo del proceso de investigación tanto de la variable independiente como dependiente, se utilizó una bibliografía especializada con la finalidad de sustentar en el aspecto teórico**.**

3.2.POBLACIÓN Y MUESTRA

3.2.1. POBLACIÓN

La población que se utilizó en la investigación fueron los estudiantes del tercer semestre de la Carrera de Ciencias Exactas, cuenta con diecisiete estudiantes.

ESTRATO	**FRECUENCIA**	**PORCENTAJE**
Estudiantes	17	100%
TOTAL	**17**	**100%**

FUENTE: Registro del docente de Trigonometría – 3° Semestre
ELABORACIÓN: María Cruz

3.2.2. MUESTRA

Por ser un grupo pequeño el seleccionado para el presente trabajo de investigación, no se aplicó una fórmula estadística para encontrar la muestra por lo contrario se trabajó con todo el universo.

3.3.TÉCNICAS E INSTRUMENTOS DE RECOLECCIÓN DE DATOS

3.3.1. Técnica

a. **Encuesta.-** Se aplicó la encuesta a los estudiantes de Tercer Semestre de la escuela de Ciencias Exactas, de la Universidad Nacional de Chimborazo.
b. **Fichas de Observación.-** Permitió observar directamente a los individuos involucrados en la investigación para obtener datos de primera mano.

3.3.2. Instrumento

a. Cuestionario.- Para poder ejecutar el proceso de investigación se utilizó un cuestionario con preguntas cerradas que permitieron identificar el nivel de aplicabilidad de la guía didáctica

3.4. TÉCNICAS DE PROCEDIMIENTO Y ANÁLISIS DE DATOS

Con la finalidad de alcanzar una información confiable en el proceso de investigación se aplicó el siguiente procedimiento:

- Identificación de la población estudiantil
- Elaboración, validación y reproducción de indicadores para estructurar la ficha de observación.
- Tabulación de datos de cada uno de los indicadores
- Revisión de la información recogida
- Elaboración de cuadros y gráficos estadísticos mediante la hoja de cálculo Excel
- Análisis de los resultados estadísticos según porcentajes.
- Interpretación de los resultados, con apoyo del marco teórico, según corresponda.
- Determinación de conclusiones y recomendaciones.

CAPITULO IV

4. ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS

ANÁLISIS E INTERPRETACION DE RESULTADOS DE LA APLICACIÓN DE LAS ENCUESTAS DIRIGIDOS A LOS ALUMNOS

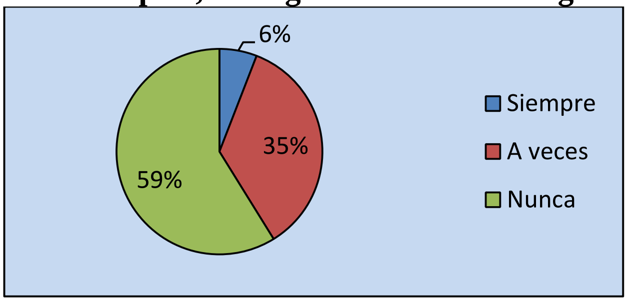
1.- ¿Su docente emplea, el uso de una guía didáctica de trigonometría en el proceso de enseñanza-aprendizaje?

Cuadro N° 1Empleo, de la guía didáctica de trigonometría

DISTRACTORES	FRECUENCIA	PORCENTAJE
Siempre	1	5.88
A veces	6	35.29
Nunca	10	58.82
TOTAL	**17**	**100**

Fuente: Estudiantes de Tercer Semestre, Escuela De Ciencias Especialidad Ciencias Exactas.
Elaborado por: María Cruz

Grafico N° 1Empleo, de la guía didáctica de trigonometría



Fuente: Cuadro N° 1.
Elaborado por: María Cruz.

a) Análisis:

El 59 % de estudiantes encuestados manifiestan que nunca el docente emplea, el uso de una guía didáctica en el proceso de enseñanza-aprendizaje el 35% que a veces y el 6% que siempre.

b) Interpretación:

Esto que no se utiliza guía didáctica alguna en el desarrollo de las clases de trigonometría siendo el docente el único autor y centro de la tarea educativa, ocasionando quizá poca participación de los estudiantes.

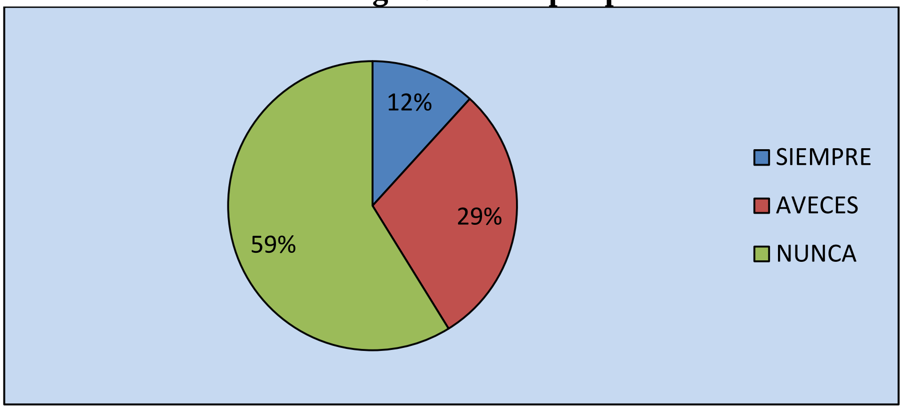
2.- ¿Está usted de acuerdo con la metodología utilizada por parte del docente para el aprendizaje de la trigonometría?

Cuadro N° 2 Metodología utilizada por parte del docente

DISTRACTORES	FRECUENCIA	PORCENTAJE
Siempre	2	11.76
A veces	5	29.41
Nunca	10	58.82
TOTAL	**17**	**100**

Fuente: Estudiantes de Tercer Semestre, Escuela De Ciencias Especialidad Ciencias Exactas.
Elaborado por: María Cruz

Grafico N° 2Metodología utilizada por parte del docente



Fuente: Cuadro N° 2
Elaborado por: María Cruz.

a) Análisis:

El 12% de estudiantes encuestados manifiestan que están de acuerdo con la metodología utilizada por parte del docente para el aprendizaje de la trigonometría 29% A veces, y el 59% nunca.

b) Interpretación:

Una vez aplicada la encuesta y analizada la encuesta se muestra clara mente que no están de acuerdo con la metodología que el docente utiliza en el proceso de enseñanza-aprendizaje de trigonometría ya que los estudiantes están siendo receptores mas no son autores directos en el desarrollo de su conocimiento.

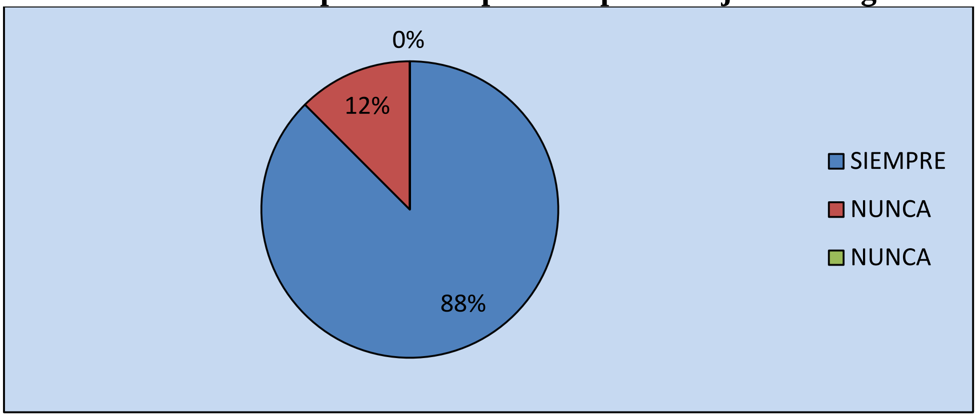
3.- ¿La guía didáctica contiene temas significativamente pertinentes para el aprendizaje de la trigonometría?

Cuadro N° 3Temas pertinentes para el aprendizaje de la trigonometría?

DISTRACTORES	FRECUENCIA	PORCENTAJE
SIEMPRE	15	83.23
AVECES	2	11.73
NUNCA	**0**	**0**
Total	**17**	**100**

Fuente: Estudiantes de Tercer Semestre, Escuela De Ciencias Especialidad Ciencias Exactas.
Elaborado por: María Cruz

Grafico N° 3Temas pertinentes para el aprendizaje de la trigonometría



Fuente: Cuadro N° 3
Elaborado por: María Cruz.

a) Análisis:

El 80% de estudiantes encuestados manifiestan que la guía didáctica contiene temas significativos para el aprendizaje de la trigonometría, y el 12% indican que a veces han encontrado contenido de interés y 0%manifestan nunca.

b) Interpretación:

Una vez aplicada e interpretada la encuesta podemos apreciar que la guía didáctica consta con contenidos significativos para la enseñanza-aprendizaje de la trigonometría en virtud que la guía es una herramienta importante para buscar soluciones a problemas trigonométricos.

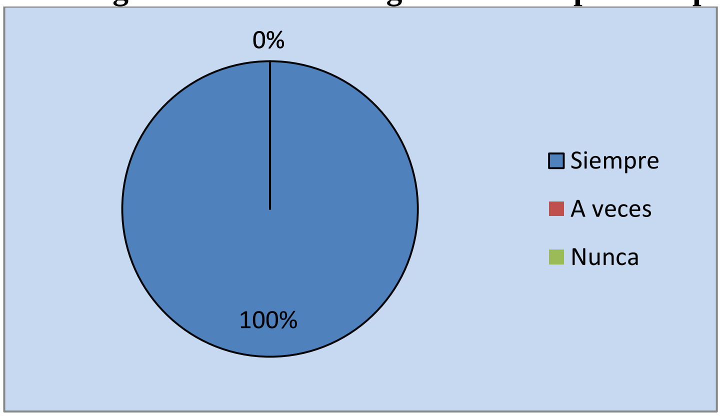
4.- ¿La guía didáctica ha sido de gran utilidad para el aprendizaje de la trigonometría

Cuadro N° 4 La guía didáctica es de gran utilidad en el aprendizaje

DISTRACTORES	**FRECUENCIA**	**PORCENTAJE**
Siempre	17	100
A veces	0	0
Nunca	0	0
TOTAL	**17**	**100**

Fuente: Estudiantes de Tercer Semestre, Escuela De Ciencias Especialidad Ciencias Exactas.
Elaborado por: María Cruz

Grafico N° 4 La guía didáctica es de gran utilidad para el aprendizaje



Fuente: Cuadro N° 4.
Elaborado por: María Cruz.

a) Análisis:

El 100%de estudiantes manifiestan que la guía de trigonometría ha sido de gran utilidad para el aprendizaje de la trigonometría el 0% indican que q a veces y nunca.

b) Interpretación:

Como lo indica la encuesta la el 100 de estudiantes manifiestan que la guía didáctica de trigonometría es de gran ayuda para el proceso de enseñanza-aprendizaje de la trigonometría teniendo un mayor apoyo para adquirir un aprendizaje significativo.

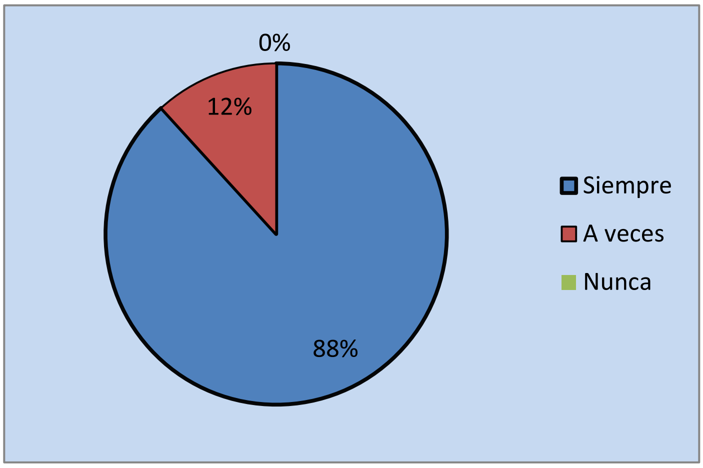
5.- ¿La aplicación de la guía didáctica de trigonometría en el proceso de enseñanza-aprendizaje le ayuda a usted a entender de mejor manera los contenidos?

Cuadro N° 5 Aplicación de la guía didáctica en el aprendizaje

DISTRACTORES	FRECUENCIA	PORCENTAJE
Siempre	15	88.23
A veces	2	11.76
Nunca	0	0
TOTAL	**17**	**100**

Fuente: Estudiantes de Tercer Semestre, Escuela De Ciencias Especialidad Ciencias Exactas.
Elaborado por: María Cruz

Grafico N° 5Aplicación de la guía didáctica en el aprendizaje



Fuente: Cuadro N°5.
Elaborado por: María Cruz.

a) Análisis:

El 88% de estudiantes manifiestan que La aplicación de la guía didáctica de trigonometría en el proceso de enseñanza-aprendizaje les ayudan a entender de mejor manera los contenidos de trigonometria12% indican que a veces y el 6% indican nunca.

b) Interpretación:

Interpretando los datos indican que es muy importante la utilización de las guías didácticas al momento de impartir las clases pues los estudiantes conciben de mejor manera el conocimiento mientras más grande sea el grado de dificultad de los ejercicios mejor será el razonamiento lógico de los estudiantes.

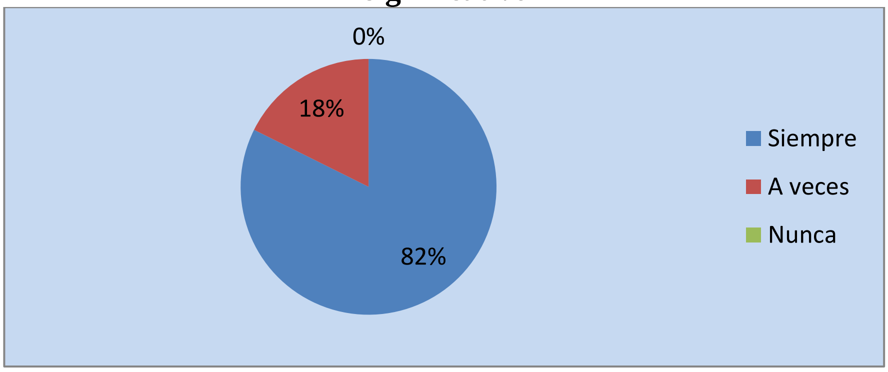
6 ¿Cree usted que la guía didáctica de trigonometría le ayudo a alcanzar un aprendizaje significativo?

Cuadro N° 6La guía didáctica permite alcanzar un aprendizaje significativo

DISTRACTORES	**FRECUENCIA**	**PORCENTAJE**
Siempre	14	82.35
A veces	3	17.64
Nunca	0	0
TOTAL	**17**	**100**

Fuente: Estudiantes de Tercer Semestre, Escuela De Ciencias Especialidad Ciencias Exactas.
Elaborado por: María Cruz

Grafico N° 6 La guía didáctica le permite alcanzar un aprendizaje significativo



Fuente: Cuadro N° 6.
Elaborado por: María Cruz.

a) Análisis:

El 82%de estudiantes Creen que la guía didáctica de trigonometría les ayudo a alcanzar un aprendizaje significativo18% indican a veces y el 0% nunca.

b) Interpretación:

Se demuestra que la guía didáctica de trigonometría es un instrumento necesario que permite desarrollar y generar aprendizajes significativos.

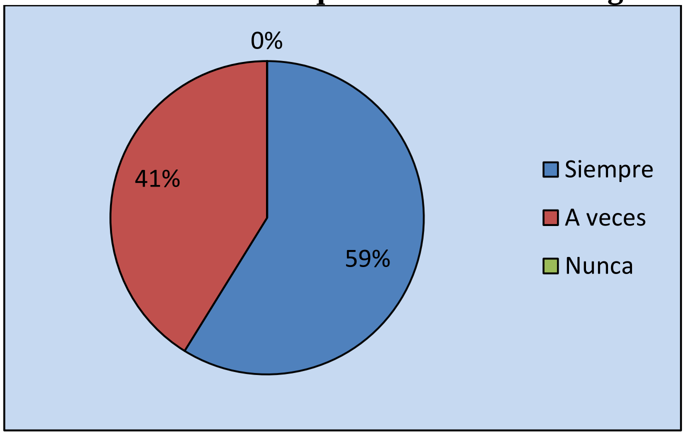
7.- ¿Usted pone en práctica los conocimientos de trigonometría adquiridos utilizando la guía didáctica?

Cuadro N° 7 Conocimientos adquiridos utilizando la guía didáctica

DISTRACTORES	**FRECUENCIA**	**PORCENTAJE**
Siempre	10	58.82
A veces	7	41.17
Nunca	0	0
TOTAL	**17**	100

Fuente: Estudiantes de Tercer Semestre, Escuela De Ciencias Especialidad Ciencias Exactas.
Elaborado por: María Cruz

Grafico N° 7Conocimientos adquiridos utilizando la guía didáctica



Fuente: Cuadro N° 7.
Elaborado por: María Cruz.

a) Análisis:

El 59% de estudiantes afirman que aplican lo aprendido en la vida cotidiana el 41% indican que a veces y 0% q nunca.

b) Interpretación:

Concluyendo lo aprendido mediante una guía didáctica con ejercicios propuestos acerca de la vida real a permitido a los alumnos desenvolverse en su vida cotidiana.

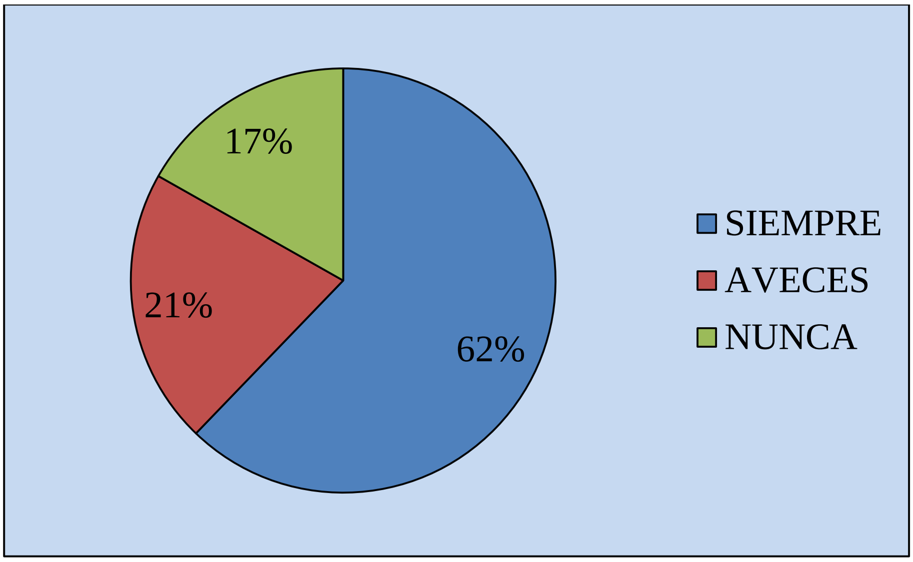
4.1.RESUMEN DE LA ENCUESTA APLICADA A LOS ESTUDIANTES DESPUÉS DE APLICAR LA GUÍA DIDÁCTICA

Cuadro N° 8Encuesta aplicada a los estudiantes

N	PREGUNTAS	INDICADORES					
		SIEMPRE	%	A VECES	%	NUNCA	%
1	¿Su docente emplea, el uso de una guía didáctica de trigonometría en el proceso de enseñanza-aprendizaje?	1	5.88	6	35.29	10	58.82
2	¿Está usted de acuerdo con la metodología utilizada por parte del docente para el aprendizaje de la trigonometría?	2	11.76	5	29.41	10	58.82
3	¿La guía didáctica contiene temas significativamente pertinentes para el aprendizaje de la trigonometría?	15	83.23	2	11.73	0	0
4	¿La guía didáctica ha sido de gran utilidad para el aprendizaje de la trigonometría?	17	100	0	0	0	0
5	¿La aplicación de la guía didáctica de trigonometría en el proceso de enseñanza-aprendizaje le ayuda a usted a entender de mejor manera los contenidos?	15	88.23	2	11.76	0	0
6	¿Cree usted que la guía didáctica de trigonometría le ayudo a alcanzar un aprendizaje significativo?	14	82.35	3	17.64	0	0
7	¿Usted pone en práctica los conocimientos de trigonometría adquiridos utilizando la guía didáctica?	10	58.82	7	41.17	0	0
	TOTAL	74	**62.18**	25	**21.00**	20	**16.80**

Resumen de la encuesta aplicada a los estudiantes después de aplicar la guía didáctica

Grafico N° 8Encuesta aplicada a los estudiantes



Fuente: Estudiantes de Tercer Semestre, Escuela De Ciencias Especialidad Ciencias Exactas.
Elaborado por: María Cruz

a) Análisis:

De la encuestas realizadas a los estudiantes el62% manifiestan que la aplicación de la guía didáctica siempre ha sido de gran utilidad para el para el aprendizaje de trigonometría en tanto que el 21% expresan que es a veces y el 17% dicen que nunca.

b) Interpretación:

Con los datos estadísticos obtenidos de la encuesta realizada a los estudiantes se puede determinar que realmente la elaboración y aplicación de una guía didáctica contribuye en el enfoque constructivista para el aprendizaje de Trigonometría en los estudiantes del tercer semestre, de la carrera de Ciencias Exactas de la Facultad de Ciencias de la Educación Humanas y Tecnologías permitiendo alcanzar aprendizajes significativos.

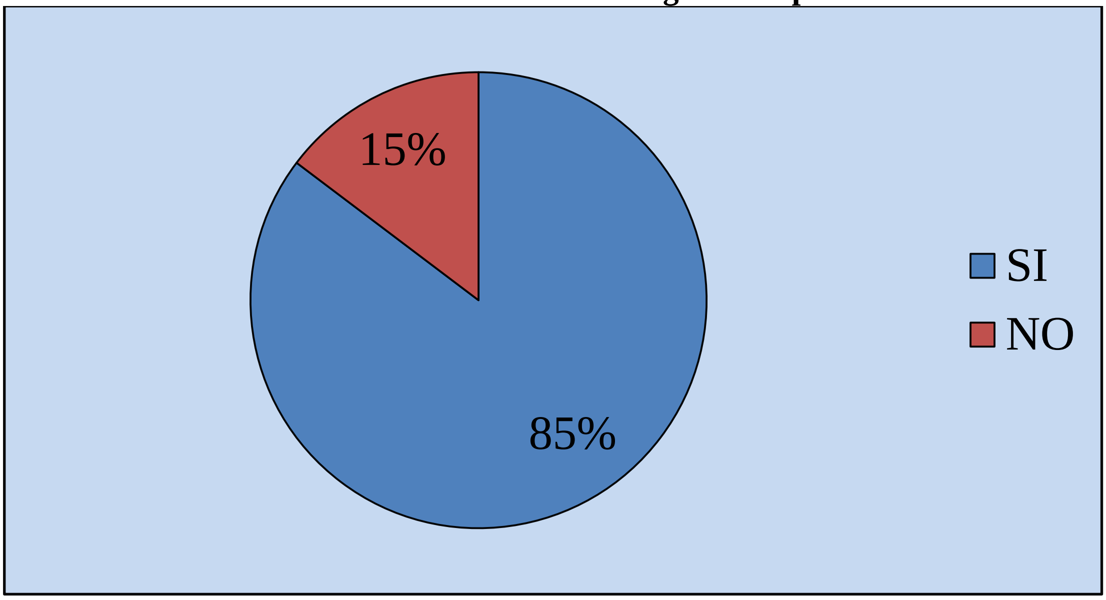
4.2. ANÁLISIS DE LA FICHA DE OBSERVACIÓN LUEGO DE LA APLICACIÓN DE LA GUÍA DIDÁCTICA

Cuadro N° 9Ficha de observación luego de la aplicación

	SI	%	NO	%
Manifiesta interés por la trigonometría	**15**	**88.23**	**2**	**11.76**
Participa en la clase	**15**	**88.23**	**2**	**11.76**
Resuelve fácilmente los ejercicios	**11**	**64.70**	**6**	**35.29**
Está atento a las aplicaciones que da el docente	**14**	**82.35**	**3**	**17.64**
Es creativo	**17**	**100**	**0**	**0**
Pregunta todas las dudas al docente	**15**	**88.23**	**2**	**11.76**
TOTAL	**87**	**85.29**	**15**	**14.70**

ANÁLISIS DE LA FICHA DE OBSERVACIÓN LUEGO DE LA APLICACIÓN DE LA GUÍA DIDÁCTICA

Grafico N° 9Ficha de observación luego de la aplicación



Fuente: Estudiantes de Tercer Semestre, Escuela De Ciencias Especialidad Ciencias Exactas.
Elaborado por: María Cruz

a) Análisis:

De acuerdo a las fichas de observación aplicadas a los estudiantes el 85% muestran interés en el aprendizaje de la trigonometría mientras que 15% muestran poco o nada de interés.

b) Interpretación:

Una vez aplicadas las fichas de observación concluyo que la guía didáctica de trigonometría con enfoque constructivista en los estudiantes del tercer semestre de la escuela de ciencias exactas de la universidad nacional de Chimborazo periodo diciembre 2012-Junio 2013 constituyo una herramienta muy importante y pilar fundamental para desarrollar y alcanzar un aprendizaje significativo en cada uno de los estudiantes.

CAPITULO V

5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

5.1. CONCLUSIONES

- Se ha determinado el nivel de conocimiento de los estudiantes través de la aplicación de didáctica de trigonometría poniendo en práctica su capacidad e iniciativa para resolver ejercicios.

- Se pudo diagnosticar los principales problemas de enseñanza-aprendizaje se identificó los pasos y procedimientos sistemáticos de su metodología, la importancia que tienen en el aprendizaje de la trigonometría, por otro lado se identificó sus características y jerarquía del método inductivo.

- Al determinar los requerimientos de los estudiantes se procedió a la selección de los contenidos de acuerdo al silabo de trigonometría para la elaboración de la guía didáctica.

- La aplicación de la guía didáctica de trigonometría viabilizo un trabajo consiente, responsable, con libertad de pensamiento durante el periodo de clase motivando a los estudiantes construir sus propios conocimientos y así produciendo un aprendizaje significativo.

- Una vez aplicada la guía didáctica de trigonometría se procedió a evaluar los conocimientos de los estudiantes mismos que mostraron positividad en sus resultados. Manifestando seriedad y rapidez al momento de desarrollar ejercicios trigonométricos.

5.2.RECOMENDACIONES

- Se debe aplicar la guía didáctica como un material más para el soporte pedagógico entre el inicio de las clases para motivarles a los estudiantes, también para que tengan el interés y la atención requerida.

- A los docentes y estudiantes de la escuela de ciencias exactas se les recomienda utilizar la guía didáctica de trigonometría para mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje ya que constituye una herramienta fundamental para en el desarrollo de habilidades y destrezas.

5.3.REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ABBOTT, J., & RYAN, T. (12 de 08 de 1999). "Constructing Knowledge and Shaping Brains" . Recuperado el 2014, de http://www.21learn.org.
- ALONSO TAPIA, J. (1997). Fundamentos psicológicos de la lectura. En Bruño: Congreso de Lectura Eficaz. (págs. 41-56). Madrid: Bruño.
- ALBUJA G., SANTACRUZ M., y VALLEJO P., Geometría Básica. Libro 1, 2 y 3. Nueva edición. Ediciones Rodin.
- ALVAREZ PAOLA, S. D. (2010). Uso de la plataforma DOKEOS como herramienta pedagógica para el aprendizaje de las materias Lengua y Literatura, y su influencia en el rendimiento académico de los estudiantes del Colegio "República de Alemania". Riobamba, Ecuador: UNACH.
- ANTONOV, N. (1985) Mil problemas de aritmética, álgebra, geometría, trigonometría. Paraninfo Cengage Learning
- AUSUBEL, D. (1968). Educational psychology: A cognitive view. . Nueva York: Rinehart and Winston.
- Bartlett, F. C. (1936). History of Psychology in Autobiography. Vol. III. Worcester: MA: Clark University Press.
- BARNETT Raymond, URIBE Julio. Algebra y Geometría. Nueva edición.
- BENEGAS, Julio y VILLEGAS, Myriam. . (2011). Departamento de Física Instituto de Matemática Aplicada de la Universidad Nacional de San Luis. Recuperado el 2013, de La enseñanza activa de la física: la experiencia de la UNSL: media.wix.com
- CALVACHE G. y otros. Geometría Plana y del Espacio. Nueva edición. Octubre de 2007.
- CLEMENS Stanley y otros. Geometría. Nueva edición. Impreso en México.
- CARRERA, B; MAZARELLA, C. (2001). Vygotsky: Enfoque Sociocultural, Vol.5. Educaré.
- CONSTITUCIÓN POLÍTICA DE LA REPÚBLICA DEL ECUADOR. (2008). Art. 26 . Constitución Política de la República del Ecuador.

- DELGADO, L. (05 de 09 de 2010). http://www.gestionparticipativa.coop/portal. Recuperado el 13 de 05 de 2013, de El modelo pedagógico constructivista: http://www.gestionparticipativa.coop/portal/index.php?option=com_content&view=article&id=255:el-modelo-pedagogico-constructivista&catid=38:travel-tips&Itemid=489
- FELDMAN, R. (2005). "Psicología: con aplicaciones en países de habla hispana". Sexta Edición.
- GRANVILLE ANTHONY y otros, Trigonometría Plana y Esférica. Nueva edición.
- GARCIA, A. (2002). La Educación a Distancia, de la teoría a la práctica. Madrid: Ariel S.A.
- GARCÍA, A. (2002). La Educación a Distancia, de la teoría a la práctica. Madrid: Ariel S.A.
- GONI Juan. Geometría. Nueva edición.
- HEMMERLING Edwin, Geometría Elemental. Nueva edición. Editorial Limusa. México.
- HILGARD, E. (1957). Introduction to Psychology. Harcourt, Brace & Co.
- INSTITUTO DE CIENCIAS DE LA ESPOL. Fundamentos Matemáticos. Segunda edición. 2007.
- IBÁÑEZ, M. (1999). El aprendizaje abierto y a distancia, el material impreso. Loja.
- IMIDEO, G. N. (1985). Hacia una didáctica General Dinámica, 4a Edición. Buenos Aires, Argentina: Kapelusz.
- JIMÉNEZ OSUNA, JOSÉ MIGUEL.(2000) Nociones de álgebra y trigonometría Universidad de Léon.
- J. GIMENO SACRISTÁN & A.I.PÉREZ GÓMEZ. (1999). Comprender y transformar la enseñanza, 8° edición. Bogotá, Colombia: AlfaOmega.
- KNIGHT S., Trigonometría Elemental. Nueva edición.
- KEEFE J., F. B. (1990). Developing a defensible Learning Style Paradigm. Educational Leadership.

- MARÍN IBÁÑEZ, R. (1999). El Aprendizaje abierto y a distancia, el material impreso. Loja-Ecuador: UTPL.
- MARTÍNEZ, C. (1988). Los sistemas de educación superior a distancia : la práctica tutorial en la UNED. Madrid: Universidad Nacional de Educación a Distancia.
- MAYA, A. (1996). El taller educativo. Magisterio.
- MCDERMOTT, L. C. (2010). Concepciones de los alumnos y resolución de problemas en mecánica. Recuperado el 15 de 01 de 2013, de Seattle: Departmentphysics,University of Washington.: http://icar.univ-lyon2.fr/gric3/ressources/ICPE/espagnol/PartC/C1_chap_p1-11.pdf
- MERCER. (1998). Estrategias metodológicas.
- MERLINI NAVARRO, IRENE (2008) Trigonometría plana: tu material didáctico Visión Libros id: ISBN 978-84-9821-279-2
- MOREIRA, M. A. (2009). “Subsidios Teóricos para el Profesor Investigador en Enseñanza de las Ciencias”.1edición. . Porto Alegre, Brasil.
- MORENO, H. (2003). Modelos Educativos Pedagógicos y Didácticos Vol. II. Bogotá, D.C. Colombia: Ediciones SEM Servicios Editoriales Del Magisterio.
- NOVAK, J. e. (1996). Aprender a aprender. Lisboa, Portugal: Plátanos.
- PARICA. (06 de 2005). Teoría del Constructivismo Social. Recuperado el 01 de 02 de 2014, de http://constructivismos.blogspot.com/2005/06/teoria-del-constructivismo-social-de.html
- PÉREZ, GÓMEZ. (1992). Comprender y transformar la enseñanza. Madrid: Morata.
- PÉREZ OLANO, JAVIER; QUIRALTE FUENTES, VIDAL (2006) Matemáticas, triángulos y trigonometría, ESO. Cuaderno de ejercicios y problemas 9 Editorial Luis Vives (Edelvives) id: ISBN 978-84-2636-067-0
- URQUIZO, A. (2006). Cómo realizar la Tesis o una investigación. Riobamba, Ecuador: Gráficas Riobamba.

- SULLIVAN Michael. Trigonometría y Geometría Analítica. Cuarta edición. México

5.4.ANEXOS

ANEXO 1. FORMATO DE ENCUESTAS

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CHIMBORAZO
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN HUMANAS Y TECNOLOGÍAS

ENCUESTA DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DETERCER SEMESTRE DE LA CARRERA DE CIENCIAS EXACTAS

Bajo el auspicio de la Universidad Nacional de Chimborazo, Facultad de Ciencias de la Educación Humanas y Tecnologías, Escuela de Ciencias: Carrera de Ciencias Exactas, me encuentro realizando una investigación en el campo de la Matemática en especial relacionada con la Trigonometría.

INSTRUCCIONES:

- Este cuestionario es anónimo, la misma que será tratada con la más absoluta privacidad y reserva.
- Lea con atención cada una de las preguntas y responda con toda su sinceridad y honestidad.
- Marque con una x la alternativa que crea conveniente:

CUESTIONARIO

1.- Participan activamente en las clases de Trigonometría.

SIEMPRE ☐

REGULARMENTE ☐

NUNCA ☐

2.- La participación de la guía didáctica de Trigonometría en el proceso de enseñanza aprendizaje le ayuda a usted a entender de mejor manera los contenidos.

SIEMPRE ☐

REGULARMENTE ☐

NUNCA ☐

3.- Ha recibido algún recurso didáctico en la catedra de Trigonometría.

SIEMPRE ☐

REGULARMENTE ☐

NUNCA ☐

4.- A trabajado usted con alguna guía didáctica de Trigonometría que contenga la información específica propuesta en el silabo.

SIEMPRE ☐

REGULARMENTE ☐

NUNCA ☐

6. Tuvo dificultad en manejar la guía didáctica propuesta,

SIEMPRE ☐

REGULARMENTE ☐

NUNCA ☐

6.- Usted está de acuerdo con la forma de enseñar de los docentes sin emplear guía didáctica de Trigonometría.

SIEMPRE ☐

REGULARMENTE ☐

NUNCA ☐

7.- Los conocimientos adquiridos en la clase de Trigonometría utilizando la guía didáctica son adquiridos mediante un aprendizaje significativo.

SIEMPRE ☐

REGULARMENTE ☐

NUNCA ☐

GRACIAS POR SU COLABORACIÓN

ANEXO 2. FORMATO DE FICHA DE OBSERVACION

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CHIMBORAZO
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN HUMANAS Y TECNOLOGÍAS

FICHA DE OBSERVACIÓN DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE TERCER SEMESTRE DE LA CARRERA DE CIENCIAS EXACTAS

Bajo el auspicio de la Universidad Nacional de Chimborazo, Facultad de Ciencias de la Educación Humanas y Tecnologías, Escuela de Ciencias: Carrera de Ciencias Exactas, me encuentro realizando una investigación en el campo de la Matemática en especial relacionada con la Trigonometría.

FICHA DE OBSRVACIÓN

OBSERVACIONES	MUCHO	FRECUENTE	OBSEVACIONES
Manifiesta interés por la trigonometría			
Participa en la clase			
Dificultad en los ejercicios			
Resuelve fácilmente los ejercicios			
Está atento a las aplicaciones que da el docente			
Es creativo			
Pregunta todas las dudas al docente			

Universidad Nacional de Chimborazo

Facultad de Ciencias de la Educación Humanas y Tecnologías

Escuela de Matemática y Física

Sílabo de la Cátedra de:

TRIGONOMETRÍA PLANA

Riobamba: 2012 - 2013

SÍLABO:	Trigonometría Plana
INSTITUCIÓN:	Universidad Nacional de Chimborazo
FACULTAD:	Ciencias de la Educación Humanas y Tecnologías
NOMBRE DE LA CARRERA:	Matemática y Física
AÑO:	Tercer Semestre
NOMBRE DE LA ASIGNATURA:	Trigonometría Plana
CÓDIGO DE LA MATERIA:	3.04- CP - TrigoPLA
NÚMERO DE CRÉDITOS TEÓRICOS:	5 créditos (80 horas)
NÚMERO DE CRÉDITOS PRÁCTICOS:	5 créditos (80 horas)

DESCRIPCIÓN DEL CURSO.
La Trigonometría Plana, considera acciones en el desarrollo mental del ser humano, en sus años de estudio y de vida. Los estudiantes al aprovisionarse de conocimientos a través de la interacción entre el pensamiento crítico, y razonamiento lógico, desarrolla la capacidad de aprendizaje y adapta al cerebro para trabajar alrededor del sentido real y profesional, esto es, el desarrollo integral del estudiante hacia el logro de in dividuos intelectuales que incursionen en lo social para resolver con eficiencia y pertinencia los problemas reales. El ensayo y la ejercitación sistemática en la elaboración, resolución de problemas de ejercicios, alcanza la praxis y refuerza las áreas neuronales de agilidad mental cuyo interés es de todos, para la evolución de la lógica deductiva de demostraciones geométricas y trigonométricas que se adapte al binomio enseñanza – aprendizaje que favorezca un cambio de actitud. Una intensa y abundante dedicación práctica en las demostraciones y resolución de problemas, llevará al estudiante a una visión clara del estudio de la Trigonometría Plana y a una preparación eficiente para fines posteriores.

PRERREQUISITOS
Esta materia tiene como prerrequisitos el dominio eficiente de las cuatro operaciones básicas en el conjunto de los números reales

CORREQUISITOS
Esta materia tiene como correquisitos el dominio eficiente de las relaciones trigonométricas fundamentales y los métodos de demostración

1. MODELO PROFESIONAL DE LA CARRERA DE MATEMÁTICA Y FÍSICA

1.1 FUNDAMENTACION SOCIAL

La carrera de Ciencias Exactas a partir de la creación de la Universidad Nacional de Chimborazo mediante Ley Nº 98 y publicada en el Suplemento Nº 771 del Registro Oficial del 31 de agosto de 1995. toma este nombre puesto que anteriormente con La Universidad Central de Ecuador - Extensión Riobamba, se denominaba Escuela de Matemática y Física
Revisados los libros correspondientes, los títulos que se otorgaron durante el funcionamiento de la carrera son:

- Licenciado en Ciencias de la Educación, Profesor de Enseñanza Media en la Especialización de Matemática y Física (Carrera Licenciatura en Matemática y Física. Colegiatura de la Universidad Central de Ecuador Extensión – Riobamba)
- Licenciado en Ciencias de la Educación. Profesor de Enseñanza Media en la Especialización de Ciencias Exactas (Carrera: Licenciatura en Ciencias Exactas)
- Licenciado en Ciencias de la Educación. Profesor de Ciencias Exactas (Carrera: Licenciatura en Ciencias Exactas)
- Que mediante resolución Nº 0037 – HCU – 08 – 02 – 2012 se aprueba la regulación de la Oferta Académica Institucional de Pregrado y Postgrado vigente en base al Memorándum Institucional de las carreras para el registro de títulos, modalidad presencial. Por ende, se aprueba la vigencia de la Carrera de LICENCIATURA EN CIENCIAS EXACTAS.

La Carrera forma a Licenciados en Ciencias de la Educación, profesores de Ciencias Exactas luego de 8 semestres de estudio, respondiendo a las necesidades locales, regionales y nacionales.
Se crea con la finalidad de formar profesionales educativos con un amplio dominio de las ciencias de la vida, con el fin de insertarse dentro del sistema nacional de Educación General Básica y Bachillerato General Unificado, enmarcado dentro de la reforma educativa actual, con una formación humanista dentro las políticas nacionales del buen vivir, orientado a construir un porvenir justo y compartido, basado en un manejo sostenible y sustentable de los recursos naturales que permita la construcción de una sociedad democrática, teniendo como eje formador la investigación científica para responder a las exigencias educativas de la sociedad actual, con una visión histórico cultural y socio-critica, para que el estudiante construya su propio conocimiento en una dimensión social.

1.2 FUNDAMENTACION EPISTEMOLOGICA

La fundamentación epistemológica de la carrera de Ciencias Exactas se fundamenta dentro del humanismo, con una visión histórica cultural y socio-crítica, mediante una interacción dialéctica del estudiante con su entorno, para la formación de un profesional consiente de su contexto, con capacidad de responder a las necesidades sociales de su comunidad, mediante la investigación científica como eje fundamental de su formación, para transformar su entorno profesional, personal y comunitario.

1.3 FUNDAMENTACION PSICOLOGICA

La escuela de Ciencias Exactas tiene como finalidad la formación de un profesional de las ciencias de la educación, con una personalidad crítica, creativa, reflexiva, orientadora, autónoma e independiente con capacidad de tomar decisiones pertinentes ante cualquier situación de la vida, basado en el saber hacer, saber ser, saber conocer y saber convivir, que contribuya positivamente al desarrollo sostenible y sustentable de la sociedad, que le permita ejercer su práctica profesional con un una visión humanista y socio-critica, con capacidad de comunicación efectiva y proactiva.

1.4 FUNDAMENTACION PEDAGOGICA.

Se considera al estudiante poseedor de conocimientos, con base en los cuales habrá de construir nuevos saberes cuyos procesos tiene como eje central al estudiante y con un rol preponderante dentro de su propio aprendizaje, a través del método de solución de problemas y la investigación científica fundamentado en una didáctica desarrolladora, que le permita aprender a aprender, con la finalidad de desarrollar el pensamiento crítico, reflexivo y lógico.

1.5 CAMPO OCUPACIONAL

El campo ocupacional del Profesional graduado en la escuela de Ciencias, Carrera de Ciencias Exactas, es ejercer la docencia en Educación General Básica Y Bachillerato General Unificado en la Asignaturas de Matemática y Física que están íntimamente relacionadas con las Ciencias de la Vida.

1.6 PROBLEMAS SOCIALES QUE RESUELVE EL PROFESIONAL

a. Desarrollo del pensamiento abstracto en la educación básica y media.
b. Desarrollo de la lectura crítica y comprensiva, sobre la base de manejo de textos.
c. Utilización adecuada de los equipos y materiales de los laboratorios.
d. Desarrollar en los estudiantes en los procesos de investigación formativa.
e. Fomentar el trabajo colaborativo y cooperativo.
f. Aplicación de Normas de seguridad en los labora

1.7 PERFIL DE LA CARRERA

a. El egresado de la escuela de ciencias, carrera de Ciencias Exactas, se desarrolla en la esfera de la docencia con cualidades, critico, creativo y reflexivo.
b. Es un profesional eficiente en el campo de la docencia, con sólidos conocimientos de las Ciencias de la vida.
c. Conoce estrategias y metodologías que apuntan a despertar en el estudiante su capacidad creativa e investigativa.
d. Conoce los fundamentos psicopedagógicos, los contenidos científicos y practica los valores éticos y morales, lo cual le permite desarrollar en los estudiantes habilidades y destrezas que facilitan el enseñanza – aprendizaje.
e. Está formado para planificar, implementar, conducir, evaluar y reflexionar sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje de sus estudiantes, fomentando en ellos habilidades y destrezas

1.8 OBJETIVO GENERAL DE LA CARRERA

Formar profesionales en ciencias de la Educación en la especialidad de Matemática y Física con sólidos conocimientos científicos, teórico prácticos actualizados, y fundamentos pedagógicos, psicológicos y didácticos que les facilite el desarrollo de habilidades y destrezas en el manejo de los procesos de enseñanza-aprendizaje para llegar a aprendizajes significativos, desarrollar valores éticos y morales con base humanista, con sentido de responsabilidad y cumplimiento de sus deberes profesionales en la docencia, que respondan con eficiencia y eficacia a las exigencias de la sociedad actual.

1.9 OBJETIVOS ESPECÍFICOS DE LA CARRERA.

- Desarrollar del pensamiento abstracto lógico y crítico en los estudiantes educación básica y media.
- Desarrollar la lectura crítica y comprensiva, sobre la base de manejo de textos básicos y complementarios.
- Utilizar adecuadamente los equipos y materiales de los laboratorios.
- Desarrollar en los estudiantes en los procesos de investigación formativa.
- Fomentar el trabajo colaborativo y cooperativo entre los distinto actores de la comunidad educativa.
- Aplicación de Normas de seguridad en el manejo y utilización de los laboratorios.

OBJETIVOS DEL CURSO

Responde al alcance del desempeño integral al que deben llegar los estudiantes en cada área de estudio durante el año, considerando las interrogantes siguientes (¿Qué acción o acciones?, ¿Qué debe saber? Y ¿Para qué?:

- Desarrolla la capacidad de conceptualización, interpretación, representación, modelación, planteamiento y resolución de problemas relacionados con los triángulos rectángulos y oblicuángulos, para aplicarlos al entorno de manera critica

- Crea procesos o algoritmos **que intervienen en la resolución de problemas trigonométricos, para desarrollar estímulos receptivos y mentales del joven**, cuyo logro es aprender de forma integral
- Desarrollar la capacidad de análisis de los **principios, axiomas y Teoremas** Trigonométricos para realizar demostraciones de igualdades e identidades trigonométricas.
- Desarrolla actitudes y valores a través del trabajo grupal o cooperativo, para fomentar la solidaridad y el buen vivir social.
- Investiga bibliográficamente contenidos importantes sobre la teoría de la Trigonométrica y expone a sus compañeros, para insertarse en el ambiente del docente responsable, capaz, con ánimo de ser un triunfador
.
- Desarrollar habilidades y destrezas mentales a través del cálculo mental, para desarrollar la capacidad de abstracción.

CONTENIDOS, RESULTADOS Y EVIDENCIAS			
CONTENIDOS-TEMAS ¿Qué debe saber y entender? (Componente Científico. CC)	Nº Horas/Semanas	RESULTADOS DEL APRENDIZAJE ¿Qué debe ser capaz de hacer? (CT)	EVIDENCIA (S) DE LO APRENDIDO
Unidad I **ELEMENTOS BÁSICOS DE LA TRIGONOMETRÍA** **Temas:** • **Sistema de medir los ángulos:** Sexagesimal y circular. • **Relaciones y Funciones trigonométricas fundamentales.** Demostraciones de igualdades e identidades Trigonométricas • Valores naturales de los ángulos notables • Líneas y signos de las funciones trigonométricas en el círculo trigonométrico • Gráficas de las funciones trigonométricas en el círculo trigonométrico • **Resolución de triángulos rectángulos:** Teorema de Pitágoras y las funciones trigonométricas. • **Resolución de triángulos oblicuángulos:** Leyes del seno, coseno y tangente	44 Semana /1 Semana/2,3,4 Semana /7,9,11 Semana /13, 15 Semana/17,18	• Construye conceptos de términos trigonométricos básicos. • Deduce las relaciones trigonométricas fundamentales • Realiza demostraciones de igualdades e identidades trigonométricas • Representa e interpretas los gráficos de las funciones trigonométricas • Resuelve ejercicios y problemas trigonométricos aplicados a la vida cotidiana o práctica, a través de la utilización de material concreto.	• Conoce el concepto • Ilustra los conceptos, leyes, principios con ejemplos concretos. • Conceptualiza sin dificultad los términos geométricos básicos, como: términos primitivos. • Desarrolla el razonamiento lógico y cr4ítico a través de las demostraciones de igualdades e identidades. • Es hábil y creativo en la solución de ejercicios y resolución de problemas de la vida cotidiana.
Clases Prácticas:	28		

• Resolución de ejercicios, y problemas sobre triángulos, cuadriláteros y cuerpos sólidos aplicados al entorno. • Demostraciones de teoremas, igualdades e identidades trigonométricas.	Semana /5,6,8,10, 12, 14 y 16		
Trabajo de Investigación:	Investiga: Los métodos informáticos para representar gráficamente las funciones trigonométricas y las líneas que representan las funciones en el círculo trigonométrico.		
Unidad II **Temas:** **Análisis Trigonométrico** • Seno, coseno, tangente y cotangente de la suma y diferencia de dos ángulos • Funciones trigonométricas de los ángulos dobles, triples y múltiples. • Funciones trigonométricas del ángulo mitad. • Suma y diferencia de senos y cosenos transformados en productos. • Demostraciones de igualdades e identidades trigonométricas **Ecuaciones, Inecuaciones y sistemas de ecuaciones trigonométricas** • Ecuaciones sencillas • Sistemas de ecuaciones • Inecuaciones sencillas • Problemas de aplicaciones	**Horas: 52** Semana /19, 20 Semana/21 Semana/24 y 25 Semana/27, 28, 29 Semana/31, 32 y 33 Semana/35 y 36	• Diferencia ángulos expresados en grados sexagesimales y radianes y expresa en cualquiera de los dos sistemas. . • Utiliza el análisis y el razonamiento para deducir relaciones trigonométricas y aplicarlos en las demostraciones de igualdades e identidades trigonométricas. • Resuelva ejercicios planteados de manera analítica y gráfica así, como, desarrolla procesos para hallar o encontrar respuestas a los problemas interdisciplinarios cotidianos.	• Posee dominio del análisis en relación a la estimulación temprana. • Maneja con habilidad el análisis en relación con toda la temática de la unidad. • Asume una actitud positiva para desarrollar la estimulación temprana • Cumple a cabalidad con el desarrollo de la capacidad de análisis de los temas ejecutados
Clases Prácticas: Resolución de ejercicios y problemas sobre triángulos aplicados al entorno Demostraciones de igualdades e identidades trigonométricas.	**20** Semana /22 ,23, 26, 30, 34		
Trabajo de Investigación:	**Investiga:** Las razones de rechazo al estudio de la Geometría y el impacto en el rendimiento académico de los estudiantes de la Escuela de Ciencias Exactas en la Facultad de Ciencias de la Educación Humanas y Tecnologías.		

CONTRIBUCIÓN DEL CURSO EN LA FORMACIÓN DEL PROFESIONAL.

La asignatura de Trigonometría Plana aporta al estudiante de la Carrera de Ciencias Exactas en su formación profesional como docente porque es una parte de la Matemática que corrobora con el desarrollo del razonamiento lógico y crítico, área que conjuntamente con la axiología hace del docente un individuo integral, esto es, que con su ejemplo y experiencia trabaja en los saberes del profesional competente en; saber conocer, saber hacer, saber ser y saber convivir.

RELACIÓN DEL CURSO CON EL CRITERIO RESULTADO DE APRENDIZAJE

La asignatura de Geometría Métrica y Trigonometría, contribuye, a sentar las bases sólidas y suficientes para iniciar el autoestudio o la investigación de esta parte de la matemática y sea capaz de ir incursionando en el estudio responsable de manera que pueda aplicar o trasladar estos conocimientos a la realidad concreta que le permita resolver problemas reales desarrollando destrezas de: representación gráfica y analítica, planteo, resolución y comprobación de resultados

METODOLOGÍA

Se aplicará una metodología activa de inter - aprendizaje entre el docente y el estudiante, esto es, mediante la participación efectiva y pertinente del estudiante y la guía del profesor, construyamos nuestros propios conceptos y algoritmos para resolver ejercicios y problemas. Se utilizará también el trabajo cooperativo, como instrumento de la investigación de carácter bibliográfico y la sustentación como elemento de responsabilidad en la formación profesional, asi como también se aplicarán evaluaciones al final de cada unidad, las mismas que luego de corregidas serán entregadas a los estudiantes, revisadas en clase, realizadas los reclamos correspondientes y finalmente aceptadas. Se tomará muy en cuenta la asistencia.

BIBLIOGRAFÍA

BIBLIOGRAFÍA BÁSICA:

- **ALBUJA G., SANTACRUZ M., y VALLEJO P., Geometría Básica. Libro 1, 2 y 3. Nueva edición. Ediciones Rodin.**
- **CLEMENS Stanley y otros. Geometría. Nueva edición. Impreso en México**
- **INSTITUTO DE CIENCIAS DE LA ESPOL. Fundamentos Matemáticos. Segunda edición. 2007**

BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA:

- HEMMERLING Edwin, Geometría Elemental. Nueva edición. Editorial Limusa. México
- SULLIVAN Michael. Trigonometría y Geometría Analítica. Cuarta edición. México
- GONI Juan. Geometría. Nueva edición.

LECTURAS RECOMENDADAS
• BARNETT Raymond, URIBE Julio. Algebra y Geometría. Nueva edición • CALVACHE G. y otros. Geometría Plana y del Espacio. Nueva edición. Octubre de 2007 • GRANVILLE ANTHONY y otros, Trigonometría Plana y Esférica. Nueva edición • KNIGHT S., Trigonometría Elemental. Nueva edición

RESPONSABLE DE LA ELABORACIÓN DEL SÍLABO:	**Msc. ANGEL VILLA OVANDO**

FECHA:	**septiembre 2012**

TABLA 2. B-1 Resultados o logros del aprendizaje del curso (a ser entregada por el profesor junto con el sílabo). Este documento es exigido por el CEAACES).

OBJETIVO 1:

Proporcionar los fundamentos científicos, metodológicos, psicopedagógicos y axiológicos para el desempeño de la docencia en el campo de la Geometría Métrica y Trigonometría, en todos los niveles y modalidades del sistema educativo ecuatoriano.

RESULTADOS O LOGROS DEL APRENDIZAJE	CONTRIBUCIÓN (ALTA, MEDIA, BAJA)	EL ESTUDIANTE DEBE:
• Construye conceptos de términos geométricos y trigonométricos básicos.	**ALTA**	**En cuestionario escrito:** • Determina los nexos o relaciones esenciales (jerárquicas y de coordinación) entre los componentes, etapas, o tendencias atribuyéndoles un significado • Establece la relación del objeto con un hecho, concepto o ley
• Realiza demostraciones de teoremas y propiedades de los elementos de los triángulos	**ALTA**	• Caracteriza el objeto de demostración • Selecciona los argumentos y hechos que corroboran el objeto de demostración • Elabora los razonamientos que relacionan los argumentos
• Resuelve ejercicios y problemas geométricos aplicados a la vida cotidiana o práctica, a través de la utilización de material concreto	**ALTA**	• Determina el objeto de aplicación • Confirma el domino de los conocimientos en que se pretende aplicar al objeto • Interrelaciona los conocimientos con las características del objeto de aplicación • Elabora conclusiones de

		los nuevos conocimientos que explican el objeto y que enriquecen los conocimientos anteriores
• Diferencia ángulos expresados en grados sexagesimales y radianes y expresa en cualquiera de los dos sistemas. .	**ALTA**	• Determina el objeto a analizar • Identifica el tipo de objeto • Delimita las partes del objeto a analizar • Determina los criterios de descomposición del todo • Delimita las partes del todo • Estudia cada parte delimitada
• Utiliza el análisis y el razonamiento para deducir relaciones trigonométricas y aplicarlos en las demostraciones de igualdades e identidades trigonométricas.	**ALTA**	• Determina el objeto a analizar • Identifica el tipo de objeto • Delimita las partes del objeto a analizar • Determina los criterios de descomposición del todo • Estudia cada parte delimitada
• Resuelva ejercicios planteados de manera analítica y gráfica así, como, desarrolla procesos para hallar o encontrar respuestas a los problemas interdisciplinarios cotidianos.	**MEDIA**	• Determina el objeto de ejemplificación • Determina los rasgos esenciales que se distinguen de otros • Aplica procesos o algoritmos • Transfiere a situaciones, hechos o sujetos concretos con rasgos distintivos del fenómeno como objeto de ejemplo

UNACH

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CHIMBORAZO

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN HUMANAS Y TECNOLOGÍAS

ESCUELA DE CIENCIAS
CARRERA DE CIENCIAS EXACTAS

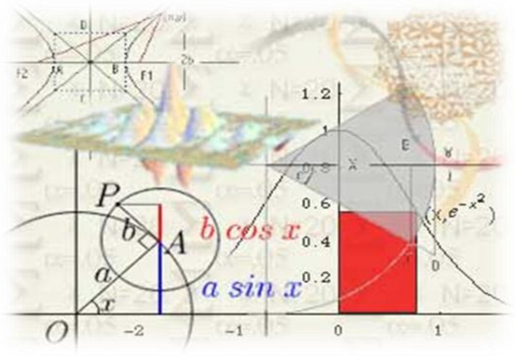
Guía Didáctica de TRIGONOMETRÍA

ÍNDICE

UNIDAD I : ELEMENTOS BÁSICOS DE LA TRIGONOMETRÍA

UNIDAD II : ANÁLISIS TRIGONOMÉTRICO

INTRODUCCIÓN



El ser humano desde tiempos de antaño, ha hecho uso de los cálculos matemáticos para solucionar diversas situaciones, empezando desde la básica construcción de un objeto simple hasta las más grandiosas arquitecturas que hoy se conocen.

Se podría decir que en todas las áreas que conoce el ser humano intervienen las matemáticas y sus diferentes derivaciones. Una de las ramas muy utilizadas es la Trigonometría, ciencia que comienza con los babilonios y egipcios, civilizaciones muy avanzadas quienes establecieron las medidas de los ángulos en grados, minutos y segundos. En el siglo II el astrónomo Hiparco de Alejandría (180 – 125 a. C) inventa la Trigonometría que fue utilizada inicialmente en formular relaciones entre las medidas angulares y las longitudes de los lados de un triángulo, conocimientos utilizados en astronomía y navegación, en las que el principal problema era determinar una distancia inaccesible.

Actualmente la trigonometría tiene diversas aplicaciones como la resolución de triángulos, y su aplicación a campos más modernos como termodinámica, electricidad y mecánica, además que el ser humano en su afán de entender los misterios del universo hacen uso de esta ciencia para determinar distancias entre los diferentes cuerpos celestes.

OBJETIVOS

GENERAL:

- Facultar a los estudiantes con los recursos materiales de Trigonometría básica.

ESPECÍFICOS:

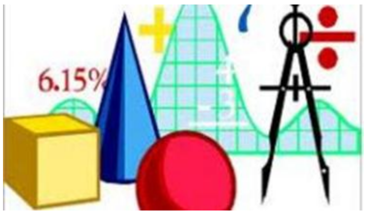
- Comprender y aplicar las propiedades de las figuras geométricas utilizando los métodos trigonométricos y recursos tecnológicos.
- Entender las diferentes funciones trigonométricas y su utilización en el medio.
- Conocer las diferentes aplicaciones de los temas tratados en el entorno.

UNIDAD I: ELEMENTOS BÁSICOS DE LA TRIGONOMETRÍA

- ✓ Sistema de medición de ángulos: Sexagesimal y Circular.
- ✓ Relaciones y funciones trigonométricas fundamentales: Demostraciones de igualdades Trigonométricas
- ✓ Valores naturales de los ángulos notables.
- ✓ Líneas y signos de las funciones trigonométrica en el círculo trigonométrico.
- ✓ Grafica de las funciones trigonométricas en el círculo trigonométrico.
- ✓ Resolución de triángulos rectángulos: Teorema de Pitágoras y las funciones trigonométricas.
- ✓ Resolución de triángulos oblicuángulos: leyes de senos, coseno y tangente

La trigonometría es una rama de la matemática, cuyo significado etimológico es 'la medición de los triángulos'. Deriva de los términos griegos τριγωνος trigōnos 'triángulo' y μετρον metron 'medida'.1

En términos generales, la trigonometría es el estudio de las razones trigonométricas: seno, coseno; tangente, cotangente; secante y cosecante. Interviene directa o indirectamente en las demás ramas de la matemática y se aplica en todos aquellos ámbitos donde se requieren medidas de precisión. La trigonometría se aplica a otras ramas de la geometría, como es el caso del estudio de las esferas en la geometría del espacio.



https://es.wikipedia.org/wiki/Trigonometr%C3%ADa

DESTREZAS GENERALES

CONCEPTUAL
El desarrollo, el conocimiento y reconocimiento de los conceptos matemáticos (su significado y su significante), sus representaciones diversas (incluyendo la lectura e interpretación de su simbología), sus propiedades y las relaciones entre ellos y con otras ciencias.
CALCULATIVA O PROCEDIMENTAL.
Procedimientos, manipulaciones simbólicas, algoritmos, cálculo mental.
MODELIZACIÓN.
La capacidad de representar un problema no matemático (la mayoría de las veces) mediante conceptos matemáticos y con el lenguaje de la matemática, resolverlo y luego interpretar los resultados obtenidos para resolver el problema

PLAN DE CLASE

ÁREA: **DOCENTE:**

SEMESTRE: Tercero **PARALELO:** A

SECCIÓN:

COMPETENCIA: Desarrollar el pensamiento lógico matemático para interpretar y resolver problemas del contexto.

EJE DE APRENDIZAJE: El razonamiento, la demostración, la comunicación las conexiones y/o la representación.

UNIDAD 1: Elementos Básicos de La Trigonometría

TEMA: Sistemas de medición de ángulos: Sexagesimal y Circular

OBJETIVO GENERAL: Aplicar los sistemas de medición de ángulos según el caso correspondiente y diferenciarlos según su aplicación.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

- Observar el entorno que nos rodea, descubrir ángulos y clasificarlos.
- Realizar operaciones de suma y resta con ángulos.

Destreza con criterio de desempeño	Actividades	Recursos	Evaluación	
			Indicador Esencial/ indicadores de logro	**Técnica/ Instrumento**
• Comprender la definición de un ángulo. • Medir un ángulo mediante los sistemas sexagesimal y circular. • Realizar operaciones de suma, resta, multiplicación y cociente en los diferentes sistemas.	**Experiencia** Con ejemplos de la vida real familiarizar ideas sobre ángulos y su utilización. **Reflexión** Identificar que es un ángulo. **Conceptualización** Definición de ángulo Qué es el sistema sexagesimal Qué es el sistema angular. Equivalencia entre el Sistema Sexagesimal y el Circular **Aplicación**	Texto Elementos del medio Gráficos Proyector Internet	**Indicador esencial de evaluación**. Identifica un ángulo y lo expresa en los diferentes sistemas. **Indicadores de logro**: Realiza operaciones de suma, resta, multiplicación y cociente en los diferentes sistemas. Utiliza aplicaciones web para comprobar el uso de ángulos.	• Trabajos individuales. • Trabajos grupales. • Cuestionarios • Organizadores gráficos

	Reconocer un ángulo. Realizar las trasformaciones necesarias. Realiza las operaciones de suma y resta entre los ángulos en los diferentes sistemas. Identificar las diferentes aplicaciones de los ángulos.			

DOCENTE

DESARROLLO DEL TEMA

TEMA: Sistemas de medición de ángulos: Sexagesimal y Circular

OBJETIVO GENERAL: Aplicar los sistemas de medición de ángulos según el caso correspondiente y diferenciarlos según su aplicación.

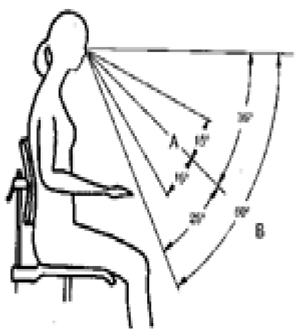
DESTREZAS CON CRITERIO DE DESEMPEÑO:

- Comprender la definición de un ángulo.
- Medir un ángulo mediante los sistemas sexagesimal y circular.
- Realizar operaciones de suma y resta en los diferentes sistemas

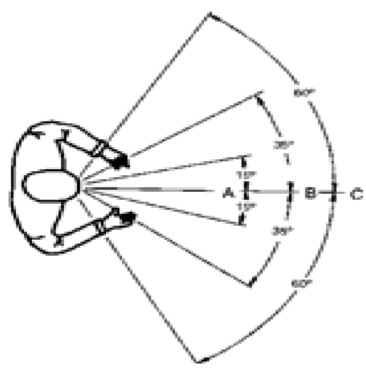
CONSTRUCCIÓN DEL CONOCIMIENTO:

En el entorno diario, las personas realizamos diversas actividades que involucran ángulos, uno simple es levantar nuestra visión o bajarla, y es así que se forma un ángulo.

1)



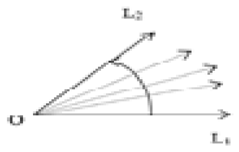
2)



SISTEMAS DE MEDICIÓN DE ÁNGULOS

Definición: Ángulo es una parte del plano limitada por dos semirrectas (lados del ángulo), que tienen un origen en común, denominado vértice (O)

a) b)



La medida o medición de un ángulo consiste en asociar a todo ángulo del plano un número que caracteriza su abertura (la parte del plano comprendida en el interior del ángulo).

Para medir un ángulo se pueden utilizar unidades de distintos sistemas de medición.

SISTEMA SEXAGESIMAL:

La unidad de medida en este sistema es el **grado sexagesimal** (1º), que se obtiene de dividir el ángulo recto en 90 partes iguales.

1 h $\rightarrow$ 60 min $\rightarrow$ 60 s

1º $\rightarrow$ 60' $\rightarrow$ 60''

OPERACIONES CON EL SISTEMA SEXAGESIMAL

SUMA:

Suma

1. Se colocan las horas debajo de las horas (o los grados debajo de los grados), los minutos debajo de los minutos y los segundos debajo de los segundos; y se suman.

Ejemplo:

$$\begin{array}{rl} & 33° \; 24' \; 48'' \\ + & 35° \; 44' \; 28'' \\ \hline & 68° \; 68' \; 76'' \end{array}$$

2. Si los segundos suman más de 60, se divide dicho número entre 60; el resto serán los segundos y el cociente se añadirá a los minutos.

Ejemplo:

$$76'' \div 60 = 1' \; 16''$$

Por lo tanto tenemos:

$$68° \; 69' \; 16''$$

3. Se hace lo mismo para los minutos.

Ejemplo:

$$69'' \div 60 = 1' \; 19''$$

Por lo tanto tenemos:

$$69° \; 19' \; 16''$$

RESTA

1. Se colocan las horas debajo de las horas (o los grados debajo de los grados), los minutos debajo de los minutos y los segundos debajo de los segundos.

   Ejemplo:

$$\begin{array}{r} 52h\ \ 23\,min\ \ 18s \\ -\quad 43h\ \ 49min\ \ 25s \\ \hline \end{array}$$

2. Se restan los segundos. Caso de que no sea posible, convertimos un minuto del minuendo en 60 segundos y se lo sumamos a los segundos del minuendo. A continuación restamos los segundos.

   Ejemplo:

$$\begin{array}{r} 52h\ \ 22\,min\ \ 18s \\ -\quad 43h\ \ 49min\ \ 25s \\ \hline 53s \end{array}$$

3. Hacemos lo mismo con los minutos.
   Y después restamos las horas.

   Ejemplo:

$$\begin{array}{r} -\quad 51h\ \ 82\,min\ \ 78s \\ 43h\ \ 49min\ \ 25s \\ \hline 8h\ \ \ \ 33min\ \ 53s \end{array}$$

MULTIPLICACIÓN POR UN NÚMERO

1. Multiplicamos los segundos, minutos y horas (o grados) por el número.

   Ejemplo:

$$32° \ 23' \ 49''$$

$$x\,5$$

$$160° \ 115' \ 245''$$

2. Si los segundos sobrepasan los 60, se divide dicho número entre 60; el resto serán los segundos y el cociente se añadirán a los minutos.

   Ejemplo:

$$245'' \div 60 = 4' \ 5''$$

Por lo tanto tenemos:

$$160° \ 119' \ 5''$$

3. Se hace lo mismo para los minutos.

   Ejemplo:

$$119' \div 60 = 1° \, 59' 5''$$

Por lo tanto tenemos:

$$161° \ 59' \ 5''$$

}

DIVISIÓN POR UN NÚMERO

Dividir 37º 48' 25" entre 5:

1. Se dividen las horas (o grados) entre el número.

   Ejemplo:

$$37° \div 5 = 7° \; 2''$$

2. El cociente son los grados y el resto, multiplicando por 60, los minutos.

   Ejemplo:

$$37° \div 5 = 7° \; 2'' \rightarrow 2 * 60 = 120\,'$$

3. Se añaden estos minutos a los que tenemos y se repite el mismo proceso con los minutos.

   Ejemplo:

$$48' + 120' = 168' \div 5 = 33'18\,'' \rightarrow 3 * 60 = 180''$$

4. Se añaden estos segundos a los que tenemos y se dividen los segundos.

   Ejemplo:

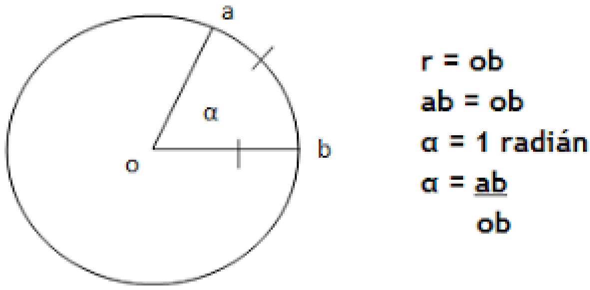
$$25 + 180 = 205 \div 5 = 41\,''$$

$$7° \; 33' \quad 41\,''$$

SISTEMA CIRCULAR

La unidad de medida en este sistema es el radián.

Se llama **radián** al ángulo que abarca un arco de circunferencia cuya longitud es igual al radio de la misma.



El valor de un ángulo de un giro es de 2π radianes.

Cuadro de equivalencias:

Sistema Sexagesimal	Sistema Circular
$\mathbf{90^{\circ}}$	$\frac{\pi}{2}$
$\mathbf{180^{\circ}}$	π
$\mathbf{360^{\circ}}$	2π

Ejemplo:

¿Cuántos radianes son 30º?

$$\begin{array}{ll} 360^{\circ} & 2\pi \\ 30^{\circ} & X \end{array}$$

$$\boldsymbol{X = \frac{30^{\circ} \times 2\pi}{360} = \frac{\pi}{6} rad}$$

APLICACIÓN

Como podemos darnos cuenta, en nuestro diario vivir hacemos uso de los ángulos, al mirar objetos sea hacia arriba o hacia abajo, al proyectar un camino que vamos a seguir.

Describe tres actividades cotidianas en las cuales intervengan los ángulos.

EJERCICIOS

- Calcula en minutos los siguientes ángulos:

$$27° = 27 \times 60 = 1620'$$
$$45{,}4° = 45{,}4 \times 60 = 2724'$$

- Una veleta gira un ángulo de $\frac{\pi}{2}$ calcula el minutos el total de giro:

$$\frac{\pi}{2} \rightarrow 90° \rightarrow 90 \times 60 = 540'$$

- Un disco presenta un giro de 54° 1’ 44” exprésalo en radianes:

$$44'' \div 60 = 0{,}73$$
$$1' + 0{,}73 = 1{,}73$$
$$1{,}73 \div 60 = 0{,}028°$$
$$54° + 0{,}028° = 54{,}028°$$
$$54{,}028° \times \frac{\pi}{180} = 0{,}94298\, rad$$

- Determina la equivalencia de los ángulos dados en rad a grados:

$$\frac{4\pi}{5} \to \frac{4 \times 180}{5} = 144°$$

$$\frac{\pi}{7} \to \frac{\frac{\pi}{7} \times 180}{\pi} = \frac{\frac{180\pi}{7}}{\pi} = 25{,}71°$$

$$\frac{4\pi}{7} \to \frac{\frac{4\pi}{7} \times 180}{\pi} = \frac{\frac{720\pi}{7}}{\pi} = 102{,}86°$$

- Indica a cuantos rad equivalen los siguientes ángulos:

$$45° \to \frac{45°\pi}{180°} = \frac{\pi}{4}$$

$$260 \to \frac{260°\pi}{180°} = \frac{13\pi}{9}$$

EVALUACIÓN

Según lo aprendido conteste las siguientes preguntas, debe marcar una sola respuesta en las preguntas de selección, solo en aquellas que se indique que resuelva deberá hacer los cálculos necesarios.

Buenas Suerte ☺

a) Un ángulo se define como una parte del plano limitada por dos semirrectas?

( ) Verdadero

( ) Falso

b) Para medir un ángulo se pueden utilizar unidades de distintos sistemas de medición, que son:

…………………………………….

…………………………………….

c) La unidad de medida en el sistema **sexagesimal** es el :

……………………………………

d) La unidad de medida del sistema circular es el radián.

( ) Verdadero

( ) Falso

e) 90° equivale a :

( ) $\frac{\pi}{3}$

( ) $\frac{\pi}{6}$

( ) $\frac{\pi}{2}$

f) $\frac{3\pi}{4}$ equivale a :

( ) $100°$

( ) $110°$

( ) $135°$

g) Pasa a minutos las siguientes medidas de ángulos.

15° =

30°12' =

h) Realicen las siguientes operaciones entre ángulos:

135° 02´ 46” + 15° 52´ 16” =

326° 45´ 6” - 184° 32’ 19” =

72° 04´ + 15° 27´ 54” =

PLAN DE CLASE

ÁREA: **DOCENTE:**

SEMESTRE: Tercero **PARALELO:** A

SECCIÓN:

COMPETENCIA: Desarrollar el pensamiento lógico matemático para interpretar y resolver problemas del contexto.

EJE DE APRENDIZAJE: El razonamiento, la demostración, la comunicación las conexiones y/o la representación.

UNIDAD 1: Elementos Básicos de la Trigonometría

TEMA: Relaciones y funciones trigonométricas fundamentales: Demostraciones de igualdades Trigonométricas

OBJETIVO GENERAL:

- Identificar las principales funciones trigonométricas.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

- Reconocer, analizar e interpretar las razones trigonométricas.
- Simplificar expresiones trigonométricas con un mínimo de error.
- Verificar identidades trigonométricas con un mínimo de error.

<table>
<tr><th rowspan="2">Destreza con criterio de desempeño</th><th rowspan="2">Actividades</th><th rowspan="2">Recursos</th><th colspan="2">Evaluación</th></tr>
<tr><th>Indicador Esencial/ indicadores de logro</th><th>Técnica/
Instrumento</th></tr>
<tr><td>• Reconocer las principales funciones trigonométricas: seno, coseno y tangente.
• Simplificar las identidades trigonométricas con un mínimo de error.
• Demostrar las identidades trigonométricas básicas.</td><td>Experiencia
Con ejemplos de la vida real familiarizar ideas sobre las funciones trigonométricas.
Reflexión
Identificar que es una identidad trigonométrica.
Conceptualización
Funciones trigonométricas
Relaciones entre funciones trigonométricas.
Relaciones fundamentales : seno, coseno y tangente
Principales identidades trigonométricas.</td><td>Texto
Elementos del medio
Gráficos
Proyector
Internet</td><td>Indicador esencial de evaluación.
Identifica una identidad trigonométrica y la expresa con las relaciones básicas..
Indicadores de logro: Utilizar instrumentos, fórmulas y técnicas apropiadas para simplificar las identidades trigonométricas.
Utiliza aplicaciones web para comprobar los resultados.</td><td>• Trabajos individuales.
• Trabajos grupales.
• Cuestionarios
• Organizadores gráficos</td></tr>
</table>

	Aplicación Identificar las identidades trigonométricas. Simplificar las identidades trigonométricas. Demostrar igualdades básicas			

DOCENTE

DESARROLLO DEL TEMA

TEMA: Relaciones y funciones trigonométricas fundamentales: Demostraciones de igualdades Trigonométricas

OBJETIVO GENERAL: Identificar las principales funciones trigonométricas.

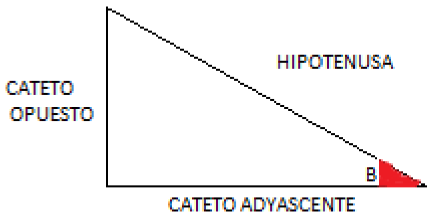
DESTREZAS CON CRITERIO DE DESEMPEÑO:

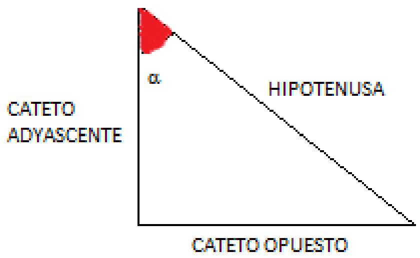
- Reconocer las principales funciones trigonométricas: seno, coseno y tangente.
- Simplificar las identidades trigonométricas con un mínimo de error.
- Demostrar las identidades trigonométricas básicas.

CONSTRUCCIÓN DEL CONOCIMIENTO:

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Para definir las funciones trigonométricas lo haremos a partir del triángulo rectángulo. Un triángulo rectángulo es aquél que tiene un ángulo recto como uno de sus ángulos interiores, los lados que forman el ángulo recto se llaman catetos, y el tercer lado es la hipotenusa. Si uno toma un ángulo interior, que no sea el ángulo recto, entonces el cateto que forma dicho ángulo será el cateto adyacente, mientras que el otro será el cateto opuesto.

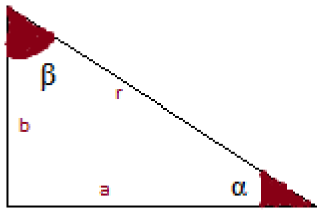




Las funciones trigonométricas son el seno, sen; el coseno, cos, y la tangente, y se definen como:

$$sen\alpha = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} \qquad cos\ \alpha = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa} \qquad tg\ \alpha = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente}$$

Entonces en el triángulo, de la figura siguiente, formado por los lados r, a y b, las funciones trigonométricas serán:



$$sen\alpha = \frac{b}{r} \qquad sen\beta = \frac{a}{r}$$

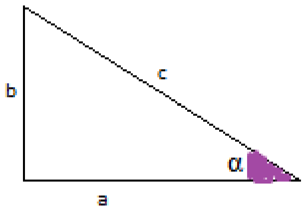
$$cos\ \alpha = \frac{a}{r} \qquad cos\ \beta = \frac{b}{r}$$

$$tg\ \alpha = \frac{b}{a} \qquad tg\ \alpha = \frac{a}{b}$$

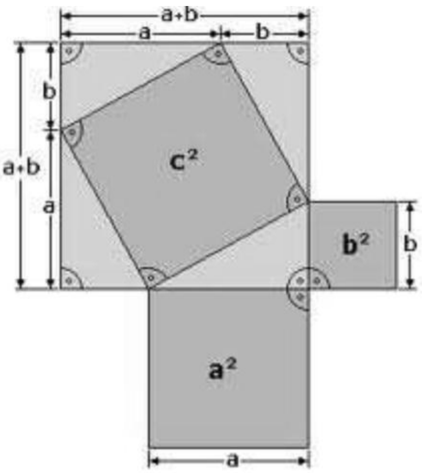
REALCIONES FUNDAMENTALES

TEOREMA DE PITAGORAS: Dado un triángulo rectángulo cualquiera, el cuadrado de la longitud de su hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de la longitud de sus catetos.

$$c^2 = a^2 + b^2$$



<u>Demostración:</u> Para demostrar la identidad vamos a utilizar un cuadrado de lado a + b subdividido como se muestra en la figura:



La superficie del cuadrado es $(a+b)^2$, pero también la podemos escribir como la suma de la superficie del cuadrado del medio más la superficie de los 4 triángulos: $c^2 + \frac{4ab}{2}$

Por lo tanto:

$$(a+b)^2 = c^2 + \frac{4ab}{2}$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab$$

$$\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$$

Una vez demostrado el teorema de Pitágoras, podemos reemplazar sus catetos por expresiones en función del ángulo α . Esto lo hacemos de la siguiente manera:

$$sen\alpha = \frac{b}{c} \rightarrow b = c\ sen\alpha$$

$$cos\ \alpha = \frac{a}{c} \rightarrow a = c\ cos\alpha$$

Si reemplazamos en el teorema de Pitágoras, obtenemos lo siguiente:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$(\,c\cos\alpha)^2 + (\,c\,\mathrm{sen}\,\alpha)^2 = c^2$$

$$c^2cos^2\alpha + c^2sen^2\alpha = c^2$$

$$c^2(cos^2\alpha + sen^2\alpha) = c^2$$

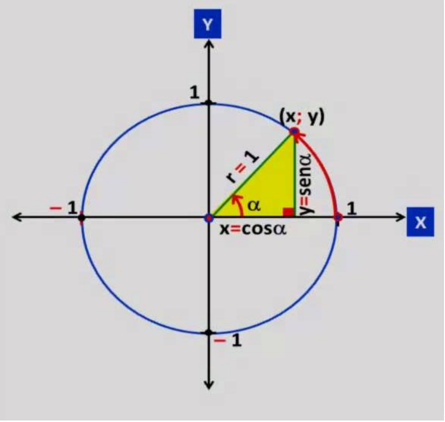
$$cos^2\alpha + sen^2\alpha = \frac{c^2}{c^2}$$

$$cos^2\alpha + sen^2\,\alpha = 1$$

Así se obtiene la relación pitagórica:

$$\boldsymbol{cos^2\alpha + sen^2\,\alpha = 1}$$

De igual manera se puede realizar la demostración de algunas identidades básicas usando el círculo trigonométrico:



$\boldsymbol{\csc\alpha = \frac{1}{sen\,\alpha}}$	$\boldsymbol{\sec\alpha = \frac{1}{cos\,\alpha}}$	$\boldsymbol{\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{sen\,\alpha}{cos\,\ \alpha}}$

$\mathbf{ctg}\,\boldsymbol{\alpha} = \dfrac{\boldsymbol{cos\ \alpha}}{\boldsymbol{sen\ \ \alpha}}$	$\text{sen}\,(-\,\alpha) = -sen\ \alpha$	$\cos\,(-\,\alpha) = cos\ \alpha$
$\dfrac{\boldsymbol{sen^2\ \alpha}}{\boldsymbol{cos\ ^2\ \alpha}} + \dfrac{\boldsymbol{cos^2\ \alpha}}{\boldsymbol{cos\ ^2\ \alpha}} = \dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{cos\ ^2\ \alpha}} \ \ \to \boldsymbol{tan^2} + \mathbf{1} = \ \boldsymbol{sec^2\alpha}$		
$\dfrac{\boldsymbol{sen^2\alpha\ \alpha}}{\boldsymbol{sen\ ^2\ \alpha}} + \dfrac{\boldsymbol{cos^2\ \alpha}}{\boldsymbol{sen\ ^2\ \alpha}} = \dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{sen\ ^2\ \alpha}} \ \ \to \boldsymbol{ctg^2} + \mathbf{1} = \ \boldsymbol{csc^2\alpha}$		

EJERCICIOS

DEMUESTRE LAS SIGUIENTES IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS:

$$\frac{\boldsymbol{sen\ \alpha + cos\ \alpha}}{\boldsymbol{sen\ \alpha}} = \mathbf{1} + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{tg\ \alpha}}$$

$$\frac{sen\ \alpha + \cos\alpha}{sen\ \alpha} = 1 + ctg\ \alpha$$

$$\frac{sen\ \alpha}{sen\ \alpha} + \frac{\cos\alpha}{sen\ \alpha} = 1 + ctg\ \alpha$$

$$1 + ctg\ \alpha = \ 1 + ctg\ \alpha$$

$$\frac{\boldsymbol{sen\ \alpha}}{\boldsymbol{csc\ \alpha}} + \frac{\boldsymbol{cos\ \alpha}}{\boldsymbol{sec\ \alpha}} = \mathbf{1}$$

$$\frac{sen\ \alpha}{\frac{1}{sen\ \alpha}} + \frac{cos\ \alpha}{\frac{1}{cos\ \alpha}} = 1$$

$$sen^2\ \alpha + \ cos\ ^2\ \alpha = 1$$

$$1 = 1$$

$$\boldsymbol{sec\,\alpha\,(1-\ sen^{2}\,\alpha)=cos\,\alpha}$$

$$\frac{1}{\cos\alpha}(1-sen\,^{2}\alpha)=\cos\alpha$$

$$\frac{1}{\cos\alpha}(cos\,^{2}\alpha)=\cos\alpha$$

$$\cos\alpha=\cos\alpha$$

$$\boldsymbol{\frac{\sec\alpha}{tg\,\alpha+ctg\alpha}=sen\,\alpha}$$

$$\frac{\frac{1}{cos\,\alpha}}{\frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha}+\frac{cos\,\alpha}{sen\,\alpha}}=sen\,\alpha$$

$$\frac{\frac{1}{cos\,\alpha}}{\frac{sen^{2}\alpha+\,cos^{2}\alpha}{sen\,\alpha cos\,\alpha}}=sen\,\alpha$$

$$\frac{\frac{1}{cos\,\alpha}}{\frac{1}{sen\,\alpha cos\,\alpha}}=sen\,\alpha$$

$$\frac{sen\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha}=sen\,\alpha\ \rightarrow\quad sen\,\alpha=sen\,\alpha$$

$$(\boldsymbol{Asenx-Bcosx})^{2}+(\boldsymbol{Acosx+Bsenx})^{2}=\boldsymbol{A^{2}+B^{2}}$$

$$A^{2}sen^{2}x-2ABsenxcosx+B^{2}cos^{2}x+A^{2}cos^{2}x+2ABsenxcosx+B^{2}sen^{2}x$$
$$=A^{2}+B^{2}$$

$$A^{2}sen^{2}x+B^{2}cos^{2}x+A^{2}cos^{2}x+B^{2}sen^{2}x=A^{2}+B^{2}$$

$$A^{2}sen^{2}x+B^{2}cos^{2}x+A^{2}cos^{2}x+B^{2}sen^{2}x=A^{2}+B^{2}$$

$$(A^{2}sen^{2}x+A^{2}cos^{2}x)+(B^{2}cos^{2}x+B^{2}sen^{2}x)=A^{2}+B^{2}$$

$A^2(sen^2x + cos^2x) + B^2(cos^2x + sen^2x) = A^2 + B^2$

$A^2 + B^2 = A^2 + B^2$

EVALUACIÓN

Según lo aprendido conteste las siguientes preguntas, debe marcar una sola respuesta en las preguntas de selección, solo en aquellas que se indique que resuelva deberá hacer los cálculos necesarios.

Buenas Suerte ☺

RESUELVE LAS SIGUIENTES IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

a) En un triángulo rectángulo la suma de los ángulos internos es 180°.

(   ) Verdadero
(   ) Falso

b) Las funciones trigonométricas son:
…………………………………………………………………………………….

c) El coseno estable la relación entre:
………………………………………………………………………………………

d) Indique si las siguientes identidades trigonométricas son verdaderas o no:

$cos^2\alpha + \ sen^2\ \alpha = 1$ v (   )   F (   )

$\csc\alpha = \frac{1}{sen\ \alpha}$ v (   )   F (   )

$ctg^2 + 1 = \ csc^2\alpha$ v (   )   F (   )

e) Demuestre las siguientes identidades:

1. $\cos\alpha \ \ tg\alpha = sen\alpha$

2. $sen\alpha \ sec\alpha = tg\alpha$

3. $cosec\alpha - sen\alpha = cotg\alpha \cos\alpha$

4. $\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = cosec\alpha - cotg\alpha$

5. $(1 + cotg^2\alpha)\ sen^2\alpha = 1$

PLAN DE CLASE

ÁREA: **DOCENTE:**

SEMESTRE: Tercero **PARALELO:** A

SECCIÓN:

COMPETENCIA: Desarrollar el pensamiento lógico matemático para interpretar y resolver problemas del contexto.

EJE DE APRENDIZAJE: El razonamiento, la demostración, la comunicación las conexiones y/o la representación.

UNIDAD 1: Elementos Básicos de la Trigonometría

TEMA: Valores naturales de los ángulos notables

OBJETIVO GENERAL:

- Identificar los ángulos notables.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

- Reconocer medidas en grados de ángulos notables.
- Afrontar problemas geométricos en base a las capacidades adquiridas.

Destreza con criterio de desempeño	Actividades	Recursos	Evaluación	
			Indicador Esencial/ indicadores de logro	**Técnica/ Instrumento**
• Reconocer los ángulos notables y usarlos en diversas operaciones. • Realizar operaciones de sustitución de valores. • Comprobar igualdades señaladas.	**Experiencia** Con ejemplos de la vida real familiarizar ideas sobre ángulos y su utilización. **Reflexión** Identificar cuáles son los ángulos notables. (30, 45 y 60 °) **Conceptualización** Definición de ángulos notables. Razones trigonométricas de 30º y 60º. Razones trigonométricas de 45 º Razones trigonométricas de otros ángulos. **Aplicación**	Texto Elementos del medio Gráficos Proyector Internet	**Indicador esencial de evaluación**. Identifica los ángulos notables. **Indicadores de logro**: Realiza operaciones de reemplazo según los valores aprendidos. Utiliza aplicaciones web para comprobar el uso de ángulos.	• Trabajos individuales. • Trabajos grupales. • Cuestionarios • Organizadores gráficos

	Resolver ejercicios con ángulos, reemplazando los valores establecidos. Reducir operaciones a su mínima expresión.			

DOCENTE

DESARROLLO DEL TEMA

TEMA: Valores naturales de los ángulos notables

OBJETIVO GENERAL:

- Identificar los ángulos notables.

DESTREZAS CON CRITERIO DE DESEMPEÑO:

- Reconocer los ángulos notables y usarlos en diversas operaciones.
- Realizar operaciones de sustitución de valores.
- Comprobar igualdades señaladas

CONSTRUCCIÓN DEL CONOCIMIENTO:

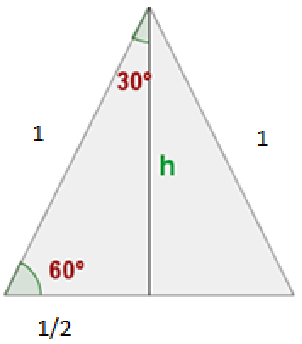
¿QUÉ SON LOS ÁNGULOS NOTABLES?

Los ángulos notables son aquellos ángulos que corresponden a triángulos rectángulos especiales y cuyos valores se pueden conseguir u obtener de forma inmediata.

Los ángulos de 30, 45 y 60 grados son ángulos llamado ángulos notables.

Razones trigonométricas de 30° y 60°: Seno, coseno y tangente

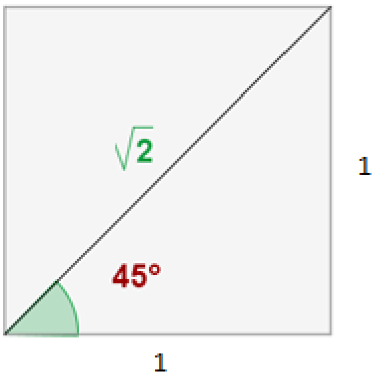
Si dibujamos un triángulo equilátero ABC, cada uno de sus tres ángulos mide 60º y, si trazamos una altura del mismo, h, el ángulo del vértice A por el que la hemos trazado queda dividido en dos iguales de 30º cada uno. Recurriendo al Teorema de Pitágoras, tenemos que la altura es:



$\boldsymbol{sen\ 30° = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}}$	$\boldsymbol{sen\ 60° = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}}$
$\boldsymbol{cos\ 30° = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}}$	$cos\ 60° = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$
$\boldsymbol{tan\ 30° = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}}$	$tan\ 60° = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

<u>Seno, coseno y tangente de 45º</u>

$$sen\ 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



$$cos\ 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$tan\ 45° = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$$

<u>Razones trigonométricas de ángulos notables</u>

Grados α	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	135^0	180^0	225^0	270^0	315^0
Radianes α	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	Π	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$
Sen α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
Tang α	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	+∞	-1	0	1	-∞	-1

APLICACIÓN

La aplicación de los ángulos notables se extiende a varias de las ramas de la matemática, en física se utiliza muchos estos conceptos básicos en la resolución de ejercicios.

La solución de problemas en los que los términos o datos son longitudes y ángulos, se desarrolla utilizando las funciones trigonométricas. La mayor aplicación va dirigida a la resolución de triángulos rectángulos u oblicuángulos.

EJERCICIOS

Calcular: $\boldsymbol{P = tan^2 60 + \ sec\,45° \times csc\,45°}$

$$P = \left(\sqrt{3}\right)^2 + \frac{1}{\cos 45°}\frac{1}{sen\,45°}$$

$$P = 3 + \frac{2}{\sqrt{2}} x \frac{2}{\sqrt{2}} = 3 + \frac{4}{2} = 5$$

Calcular: $\boldsymbol{Q = sen^2\,30° + \ tan\,45°}$

$$Q = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \ 1 = \frac{1}{4} + 1$$

$$Q = \frac{1+4}{4} = \frac{5}{4}$$

Calcular: $\dfrac{2\,sen\,\frac{\pi}{4} - 3\,cos\,\frac{\pi}{2}}{5\,tan\,\frac{\pi}{3}}$

$$\frac{2\,sen\,45° - 3\cos 90°}{5\tan 60°} = \frac{2.\frac{\sqrt{2}}{2} - 3.0}{5\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{5\sqrt{3}}\,x\,\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{15}$$

Calcular: $\dfrac{\sqrt{3}cos^2 60°}{cos\,30°} + \dfrac{sen^2\,45°}{ctg\,45°}$

$$\frac{\sqrt{3\,cos^2 60°}}{\cos 30°} + \frac{sen^{\,2}\,45°}{\frac{1}{\tan 45°}} = \frac{\sqrt{3}\,x\,(\frac{1}{2})^2}{\sqrt{3}/2} + \frac{(\sqrt{2}/2)^2}{\frac{1}{1}}$$

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} + \frac{1}{2} = \frac{2}{4} + \frac{1}{2} = 1$$

Calcular: $\dfrac{sen\,90° + cos^2\,180°}{sec360° cos\,180°} + \boldsymbol{tan0°}$

$$\frac{(1) + (-1)^2}{(1)(-1)} + 0 = \frac{1+1}{1} = -2$$

Calcular: $\dfrac{sen\,120° tan\,210°}{cos240° + csc\,150°} + \boldsymbol{ctg225°}$

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{3}}{-\frac{1}{2} + 2} = \frac{\frac{3}{6}}{\frac{3}{2}} + 1 = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} + 1 = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$$

EVALUACIÓN

Según lo aprendido conteste las siguientes preguntas, debe marcar una sola respuesta en las preguntas de selección, solo en aquellas que se indique que resuelva deberá hacer los cálculos necesarios.

Buenas Suerte ☺

a) Que son ángulos notables?

……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

b) Una según corresponda:

$sen\ 30°$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$cos\ 30°$	$\sqrt{3}$
$sen\ 60°$	$\frac{1}{2}$
$\cos 60\,°$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$tan\ 30°$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

$tan\ 60°$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$sen\ 45°$	$\frac{1}{2}$
$cos\ 45°$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) Calcular: $\boldsymbol{P = cos^{2} 60 + sen\ 45° \times csc\ 45°}$

d) Calcular: $\boldsymbol{R = tan^{2} 45 + cos\ 30° \times sen\ 60°}$

e) Calcular: $\boldsymbol{\frac{3\ sen\frac{\pi}{4} + 5\ cos\frac{\pi}{2}}{5\ tan\frac{3\pi}{4}}}$

f) Calcular: $\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}cos^{2}\ 45°}{cos\ 60°} + \frac{sen^{2}\ 120°}{tan\ 270°}}$

PLAN DE CLASE

ÁREA: **DOCENTE:**

SEMESTRE: Tercero **PARALELO:** A

SECCIÓN:

COMPETENCIA: Desarrollar el pensamiento lógico matemático para interpretar y resolver problemas del contexto.

EJE DE APRENDIZAJE: El razonamiento, la demostración, la comunicación las conexiones y/o la representación.

UNIDAD 1: Elementos Básicos de la Trigonometría

TEMA: Líneas y signos de las funciones trigonométrica en el círculo trigonométrico.

OBJETIVO GENERAL:

- Apreciar las variaciones del Seno, Coseno y Tangente, a medida que se cambia el ángulo, cuyo valor puede alterarse en forma manual o aleatoria.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

- Obtener el valor de las razones trigonométricas para s ángulo.
- Determinar los diferentes cuadrantes sobre los cuales trabaja el círculo trigonométrico.

<table>
<tr><th rowspan="2">Destreza con criterio de desempeño</th><th rowspan="2">Actividades</th><th rowspan="2">Recursos</th><th colspan="2">Evaluación</th></tr>
<tr><th>Indicador Esencial/ indicadores de logro</th><th>Técnica/
Instrumento</th></tr>
<tr><td>• Identificar el círculo trigonométrico y las funciones inscritas en él.
• Determinar los cuadrantes del círculo trigonométrico.
• Aplicar lo aprendido en la resolución de ejercicios prácticos.</td><td>Experiencia
Con ejemplos de la vida real familiarizar ideas sobre lo que es el círculo trigonométrico.
Reflexión
Identificar las funciones básicas como seno, coseno y tangente en el círculo trigonométrico.
Conceptualización
Definición del círculo trigonométrico y funciones trigonométricas.
Cuadrantes del círculo trigonométricos.
Aplicación
Resolver ejercicios con ángulos,</td><td>Texto
Elementos del medio
Gráficos
Proyector
Internet</td><td>Indicador esencial de evaluación.
Identifica las funciones inscritas en el círculo trigonométrico.
Indicadores de logro:
Grafica los ángulos en el cuadrante correspondiente.
Identifica las funciones y calcula valores al realizar operaciones.</td><td>• Trabajos individuales.
• Trabajos grupales.
• Cuestionarios
• Organizadores gráficos</td></tr>
</table>

	reemplazando los valores establecidos. Reducir operaciones a su mínima expresión.			

DOCENTE

DESARROLLO DEL TEMA

TEMA: Líneas y signos de las funciones trigonométrica en el círculo trigonométrico

OBJETIVO GENERAL:

Apreciar las variaciones del Seno, Coseno y Tangente, a medida que se cambia el ángulo, cuyo valor puede alterarse en forma manual o aleatoria.

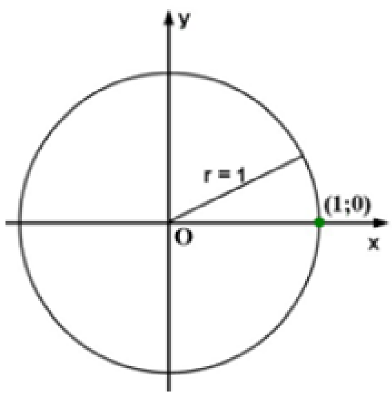
DESTREZAS CON CRITERIO DE DESEMPEÑO:

- Identificar el círculo trigonométrico y las funciones inscritas en él.
- Determinar los cuadrantes del círculo trigonométrico.
- Aplicar lo aprendido en la resolución de ejercicios prácticos.

CONSTRUCCIÓN DEL CONOCIMIENTO:

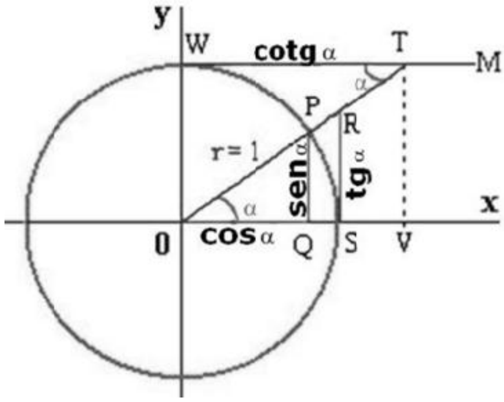
CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO

Definición: Se llama círculo trigonométrico a aquel cuyo centro es el punto origen del sistema de coordenadas cartesianas, su radio unitario, siendo el punto origen de los arcos el punto de intersección de esa circunferencia con el semieje positivo de las abscisas



LÍNEAS TRIGONOMÉTRICAS

Las razones trigonométricas deducidas en el círculo trigonométrico (de radio unitario) se corresponden con los valores de ciertos segmentos de recta que se denominan líneas trigonométricas. A continuación se muestran las líneas trigonométricas en el primer cuadrante. La forma de obtener las líneas trigonométricas en los otros tres cuadrantes es similar.



Los triángulos OQP, OSR, TWO y OVT son semejantes, los cuatro son rectángulos y tienen un ángulo agudo en común (por lo tanto, también el tercero). La consecuencia de esto es que las razones entre dos de los lados de uno cualquiera de los triángulos, es igual a la razón entre los lados homólogos en los otros triángulos. Teniendo en cuenta esto y que el radio del círculo es 1, se deducen las seis líneas trigonométricas:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{PQ}}{1} = \overline{PQ}$$

$$\cos\alpha = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OQ}}{1} = \overline{OQ}$$

$$\text{Tang}\,\alpha = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OQ}} = \frac{\overline{RS}}{\overline{OS}} = \frac{\overline{RS}}{r} = \frac{\overline{RS}}{1} = \overline{RS}$$

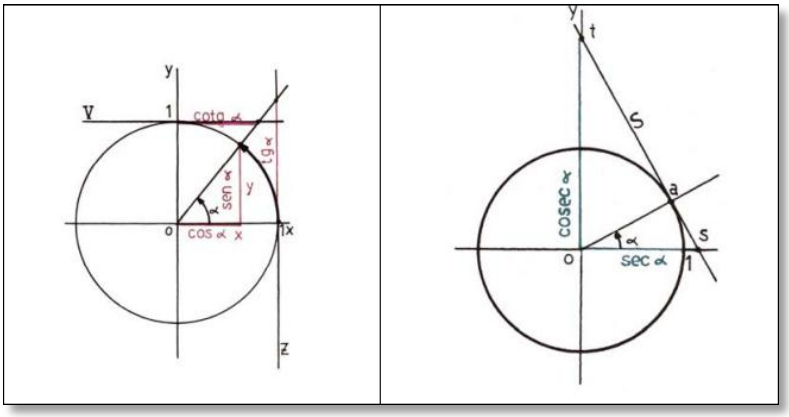
$$\text{Cotang}\,\alpha = \frac{\overline{OQ}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{OV}}{\overline{TV}} = \frac{\overline{WT}}{\overline{OW}} = \frac{\overline{WT}}{r} = \frac{\overline{WT}}{1} = \overline{WT}$$

$$\sec\alpha = \frac{\overline{OP}}{\overline{OQ}} = \frac{\overline{OR}}{r} = \frac{\overline{OR}}{1} = \overline{OR}$$

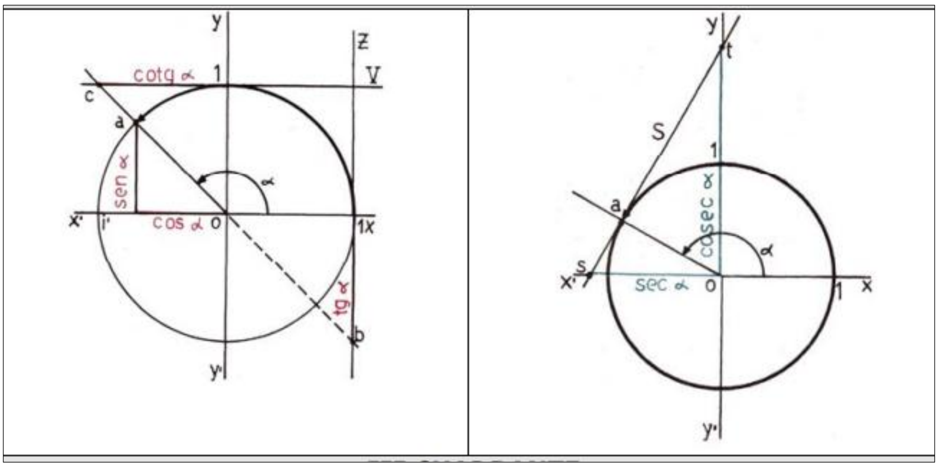
$$Cos\,\text{ec}\,\alpha = \frac{\overline{OP}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{OT}}{r} = \frac{\overline{OT}}{1} = \overline{OT}$$

LÍNEAS TRIGONOMÉTRICAS SEGÚN EL CUADRANTE

I CUADRANTE:

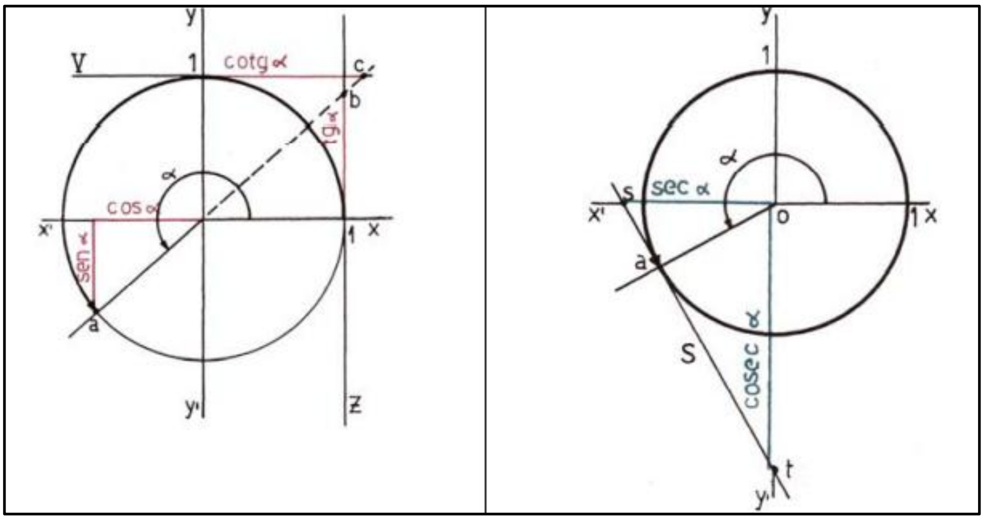


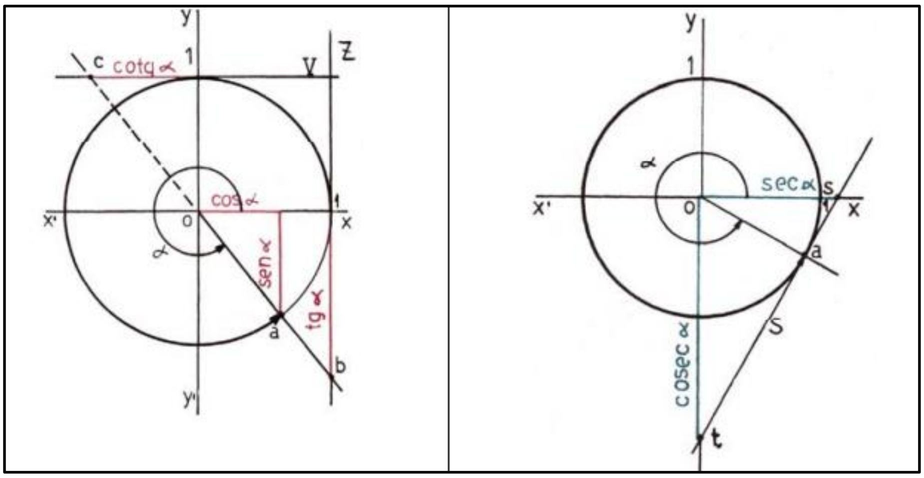
II CUADRANTE:



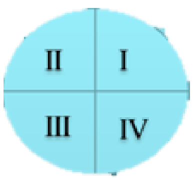
III CUADRANTE:

IV CUADRANTE:





SIGNOS DE LAS FUNCIONES TRIGNOMÉTRICAS SEGÚN EL CUADRANTE



	Seno	Coseno	Tangente	Cotangente	Secante	Cosecante
I	+	+	+	+	+	+
II	+	-	-	-	-	+
III	-	-	+	+	-	-
IV	-	+	-	-	+	-

EJERCICIOS

Determina el valor exacto de:

$\boldsymbol{a)\ tan\left(\frac{5\pi}{3}\right)}$ $\boldsymbol{b)\ sen\left(\frac{-11\pi}{6}\right)}$

Solución:

a) $\frac{5\pi}{3}$ se ubica el IV cuadrante por lo que la tangente es negativa, él ángulo de referencia de $\frac{5\pi}{3}$ es $\frac{\pi}{3}$

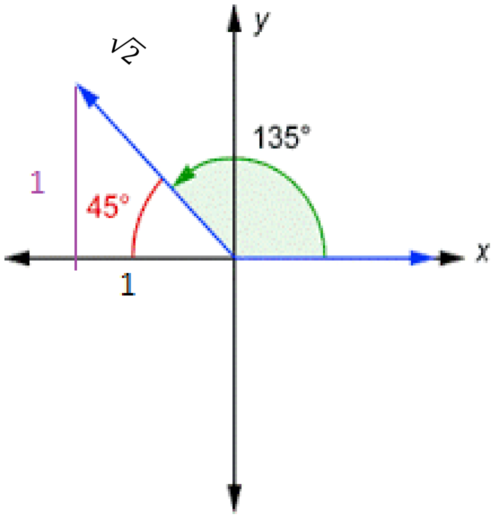
$$tan\left(\frac{5\pi}{3}\right) = -tan\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$$

b) $\boldsymbol{\frac{-11\pi}{6}}$ se ubica en el I cuadrante por lo que el seno es positivo, él ángulo de referencia para $\frac{-11\pi}{6}$ es $\frac{\pi}{6}$

$$sen\left(\frac{-11\pi}{6}\right) = sen\ \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

Resuelve las funciones del ángulo de 135°

X= -1 y=1 d=$\sqrt{2}$



$$\text{sen } 135° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 135° = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 135° = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\text{ctg } 135° = \frac{-1}{1} = -1$$

Encuentra el valor de las funciones trigonométricas notables:

$$\sec 150° = -\sec 30° = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\cos 210\,° = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\csc 120° = \csc 60° = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\tan 315° = -\tan 45° = -1$$

EVALUACIÓN

Según lo aprendido conteste las siguientes preguntas, debe marcar una sola respuesta en las preguntas de selección, solo en aquellas que se indique que resuelva deberá hacer los cálculos necesarios.

Buenas Suerte ☺

a) Qué es el círculo trigonométrico?

………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………

b) Indique en un gráfico los cuadrantes en los cuales se divide el círculo trigonométrico

c) Indique en cuales cuadrantes el seno es positivo

………………………….. ……………………..
………………………….. …………………….

d) Indique en cuales cuadrantes el coseno es negativo

………………………….. ……………………..
………………………….. …………………….

e) Indique si es verdadero o falso:

Sen 20° > Sen 80° ……………………….
Sen 190° < sen 250 ° ……………………….

f) Deje en términos de los respectivos valores del seno y el coseno de un ángulo agudo los ángulos :

a) 227º

b) 260º

c) 265º

PLAN DE CLASE

ÁREA: **DOCENTE:**

SEMESTRE: Tercero **PARALELO:** A.

SECCIÓN:

COMPETENCIA: Desarrollar el pensamiento lógico matemático para interpretar y resolver problemas del contexto.

EJE DE APRENDIZAJE: El razonamiento, la demostración, la comunicación las conexiones y/o la representación.

UNIDAD 1: Elementos Básicos de la Trigonometría

TEMA: Resolución de triángulos rectángulos: Teorema de Pitágoras y las funciones trigonométricas

OBJETIVO GENERAL:

- Resolver triángulos rectángulos aplicando las diferentes fórmulas y criterios aprendidos.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

- Relacionar objetos de la vida cotidiana con el triángulo rectángulo.
- Identificar las principales funciones trigonométricas del triángulo rectángulo.

Destreza con criterio de desempeño	Actividades	Recursos	Evaluación	
			Indicador Esencial/ indicadores de logro	Técnica/ Instrumento
• Identificar y resolver los triángulos rectángulos. • Realizar operaciones de cálculo según los datos que se obtengan. • Resolver problemas cotidianos en los cuales intervengan triángulos rectángulos.	**Experiencia** Con ejemplos de la vida real familiarizar ideas sobre triángulos en especial el triángulo rectángulo. **Reflexión** Identificar en el medio que nos rodea triángulos rectángulos **Conceptualización** Definición de triángulo rectángulo. Teorema de Pitágoras Aplicaciones del teorema de Pitágoras. Razones trigonométricas del triángulo rectángulo. Cálculo exacto de las razones	Texto Elementos del medio Gráficos Proyector Internet	**Indicador esencial de evaluación**. Identifica los triángulos rectángulos señalando sus características. **Indicadores de logro**: Encuentra los elementos faltantes del triángulo rectángulo. Resuelve ejercicios cotidianos que involucren triángulos rectángulos.	• Trabajos individuales. • Trabajos grupales. • Cuestionarios • Organizadores gráficos

	trigonométricas para ángulos particulares. **Aplicación** Resolver ejercicios con ángulos, reemplazando los valores establecidos. Reducir operaciones a su mínima expresión.			

DOCENTE

DESARROLLO DEL TEMA

TEMA: Resolución de triángulos rectángulos: Teorema de Pitágoras y las funciones trigonométricas

OBJETIVO GENERAL:

- Resolver triángulos rectángulos aplicando las diferentes fórmulas y criterios aprendidos

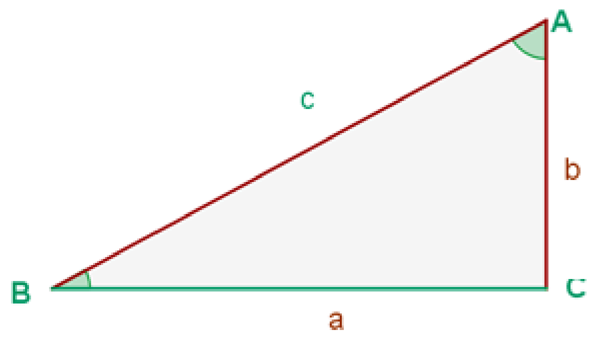
DESTREZAS CON CRITERIO DE DESEMPEÑO:

- Identificar y resolver los triángulos rectángulos.
- Realizar operaciones de cálculo según los datos que se obtengan.
- Resolver problemas cotidianos en los cuales intervengan triángulos rectángulos.

CONSTRUCCIÓN DEL CONOCIMIENTO:

TRIÁNGULO RECTÁNGULO

Resolver un triángulo consiste en calcular seis elementos: los tres lados y los tres ángulos. Aunque en el triángulo rectángulo ya se conoce el ángulo recto que forman dos lados.



En donde:

- a es la hipotenusa.
- b y c son los catetos
- y A es el ángulo de 90° o recto.

TEOREMA DE PITÁGORAS:

En todo triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos. Es decir:

$$c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Esta relación se le llama relación pitagórica.

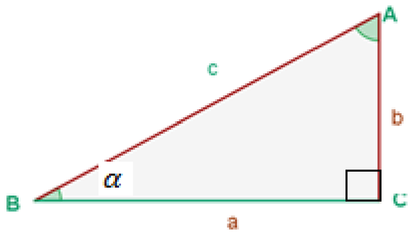
Y en consecuencia los catetos quedan establecidos por las siguientes fórmulas:

$$a = \sqrt{c^2 - b^2} \qquad b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DEL TRIÁNGULO RECTÁNGULO

Consideraremos el triángulo rectángulo Δ ABC tal que A = 90º Recordemos que en triángulo rectángulo cualquiera se cumplía el teorema de Pitágoras:

$$c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2}$$



Definimos las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente, de la siguiente manera:

$$sen\ \alpha = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{b}{c}$$

$$cos\ \alpha = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{a}{c}$$

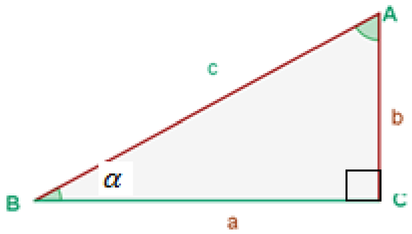
$$\tan\alpha = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{b}{a}$$

RESOLUCIÓN DE UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO

En la resolución de triángulos rectángulos se pueden presentar los siguientes casos:

Caso 1: Se conocen la hipotenusa y un cateto:

Ejemplo: Resolver el triángulo conociendo: c = 415 m y b = 280 m.



$$sen\ \alpha = \frac{b}{c} = \frac{280}{415} = 0{,}674$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \sin^{-1}(0{,}674) = 42{,}43\ °$$

Por consiguiente el ángulo que falta sería A:

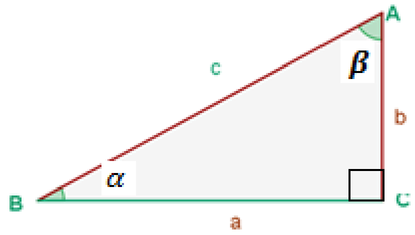
$$A = 90° - 42,43° = 47,57°$$

Para encontrar c, hacemos uso de una razón trigonométrica:

$$cos\ \alpha = \frac{a}{c} \rightarrow a = c\cos\alpha \rightarrow a = 415\cos 47{,}57° = \ \ 279{,}99$$

Caso 2: Se conocen los dos catetos.

Ejemplo: Resolver el triángulo conociendo: b = 33 m y a = 21 m, usando razones trigonométricas.



$$tan\ \alpha = \frac{b}{a} = \frac{33}{21} = 1{,}57$$

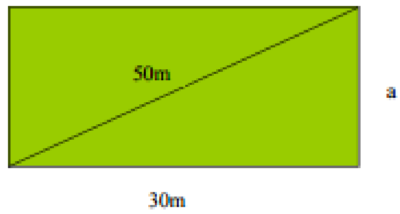
$$\alpha = \tan^{-1} 1{,}57 = 57{,}53°$$

$$tan\ \beta = \frac{a}{b} = \frac{21}{33} = 0{,}636$$

$$\beta = \tan^{-1} 0{,}636 = 32{,}47°$$

$$sen\ \alpha = \frac{b}{c} \rightarrow c = \frac{b}{sen\alpha} = \frac{33}{sen\ 57{,}53}$$

$$= 39,20\ m$$



EJERCICIOS

- Se desea cercar un solar rectangular que mide 30m de ancho y tiene una diagonal de 50m. ¿Cuántos metros de alambre se necesita?.

$a = \sqrt{c^2 - b^2}$

$a = \sqrt{50^2 - 30^2}$

$a = 40\ m$

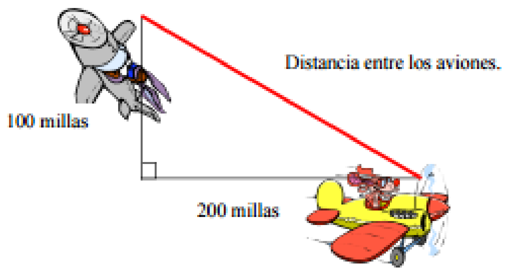
El perímetro es:

P=2b + 2h

P= 2(30) + 2(40)

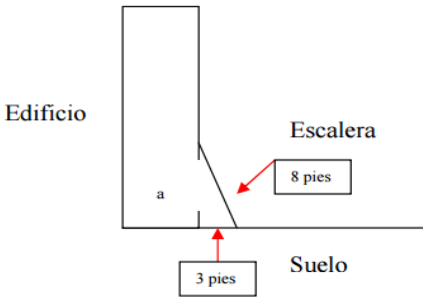
P= 60 + 80 = 140 metros de alambre

- Un avión sale hacia el norte y recorre en un ahora 100 millas. Otro avión sale hacia el este desde el mismo punto y recorre 200 millas en una hora. ¿A qué distancia se encuentra uno del otro en ese tiempo?



$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{100^2 + 200^2} = 223{,}61\ millas$$

- En un incendio, los bomberos llegan hasta éste con una escalera de 8 pies de altura. La ventana del apartamento donde ocurre el incendio está a 7 pies de altura. Por seguridad, los bomberos tienen que colocar la escalera a tres pies o más de la pared. ¿A cuántos pies del edificio llegará la escalera?



$$a = \sqrt{c^2 - b^2}$$
$$a = \sqrt{8^2 - 3^2}$$
$$a = \sqrt{64 - 9}$$
$$a = 7{,}42\ pies$$

- Determinar los elementos que faltan en el siguiente gráfico:

$$sen\ 60° = \frac{4{,}33}{c}$$

$$c = \frac{4{,}33}{sen\ 60°}$$

$$c = 4{,}99$$

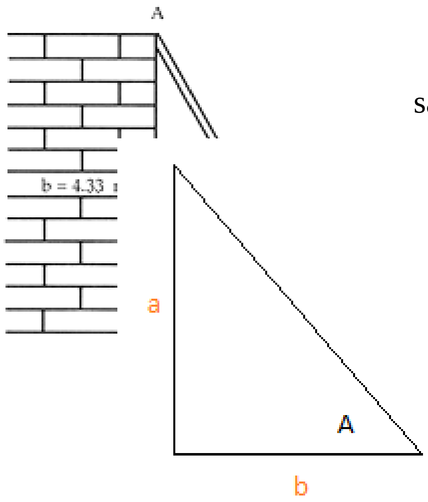
$$tan\ 60° = \frac{4{,}33}{a}$$

$$a = \frac{4{,}33}{\tan 60°}$$

$$a = 2{,}499$$

$$\tan A = \frac{a}{b} \rightarrow A = \tan^{-1}\left(\frac{2{,}499}{4{,}99}\right) \rightarrow A = 26{,}60°$$

- Hallar las funciones trigonométricas del ángulo A, sabiendo que a= 6 m y b= 9 m.



$$tg\ A = \frac{a}{b} = \frac{6}{9} = 0{,}66$$

$$A = \tan^{-1} 0{,}666$$

$$A = 33{,}69°$$

$$sen\ 33{,}69° = \frac{a}{c}$$

$$sen\ 33{,}69° = \frac{6}{c}$$

$$c = \frac{6}{sen\ 33{,}69°}$$

$$c = 10{,}81$$

-

EVALUACIÓN

Según lo aprendido conteste las siguientes preguntas, debe marcar una sola respuesta en las preguntas de selección, solo en aquellas que se indique que resuelva deberá hacer los cálculos necesarios.

Buenas Suerte ☺

a) Un triángulo rectángulo es aquel que tiene un ángulo de:

- 90°
- 45°
- 60°

- 180°

b) El teorema de Pitágoras señala que:

- La hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.
- La hipotenusa es igual a la resta de los cuadrados de los catetos.
- La hipotenusa es cualquier lado
- Ninguna de las anteriores.

c) Para encontrar alguno de los catetos debemos aplicar las siguientes fórmulas:

   …………………………………

   ………………………………….

d) Indique cuales son las razones trigonométricas de un triángulo rectángulo:

- Seno
- Cosecante
- Tangente
- Media
- coseno

e) La razón trigonométrica seno hace relación entre:

- El cateto adyacente y la hipotenusa
- El cateto opuesto y la hipotenusa
- El cateto adyacente y el cateto opuesto
- Ninguna de las anteriores

f) La razón trigonométrica coseno hace relación entre:

- El cateto adyacente y la hipotenusa
- El cateto opuesto y la hipotenusa
- El cateto adyacente y el cateto opuesto
- Ninguna de las anteriores.

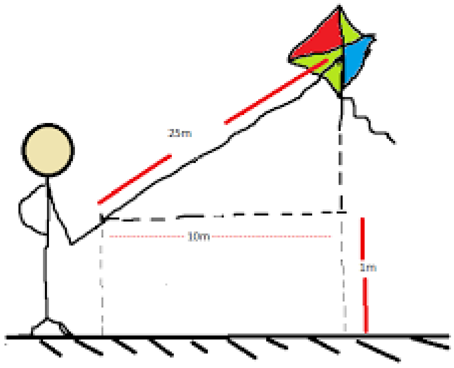
g) La razón trigonométrica que relaciona los dos catetos es:

- Seno
- Coseno
- Tangente
- Ninguna

Resuelva:

Uno de los catetos de un triángulo rectángulo mide 4,8 cm y el ángulo opuesto a este cateto mide 54°. Halla la medida del resto de los lados y de los ángulos del triángulo.

Calcular según la figura, la altura del barrilete respecto al piso. Tener en cuenta que el niño soltó todo el hilo, éste medía 25m. La punta inferior del hilo, la sostiene a 1m del piso y el barrilete está a 10m sobre la horizontal, respecto del niño.


25m
10m
1m

PLAN DE CLASE

AREA: **DOCENTE:**

SEMESTRE: Tercero **PARALELO:** A.

SECCIÓN:

COMPETENCIA: Desarrollar el pensamiento lógico matemático para interpretar y resolver problemas del contexto.

EJE DE APRENDIZAJE: El razonamiento, la demostración, la comunicación las conexiones y/o la representación.

UNIDAD 1: Elementos Básicos de la Trigonometría

TEMA: Resolución de triángulos oblicuángulos: leyes de senos, cosenos.

OBJETIVO GENERAL:

- Resolver triángulos oblicuángulos aplicando las diferentes fórmulas y criterios aprendidos.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

- Aplicar los teoremas de seno y coseno en triángulo oblicuángulos.
- Relacionar objetos de la vida cotidiana con los triángulos oblicuángulos.
- Identificar las principales funciones trigonométricas del triángulo oblicuángulo.

<table>
<tr><th rowspan="2">Destreza con criterio de desempeño</th><th rowspan="2">Actividades</th><th rowspan="2">Recursos</th><th colspan="2">Evaluación</th></tr>
<tr><th>Indicador Esencial/ indicadores de logro</th><th>Técnica/
Instrumento</th></tr>
<tr><td>• Identificar y resolver los triángulos oblicuángulos.
• Realizar operaciones de cálculo según los datos que se obtengan.
• Resolver problemas cotidianos en los cuales intervengan triángulos oblicuángulos.</td><td>Experiencia
Con ejemplos de la vida real familiarizar ideas sobre triángulos oblicuángulos.
Reflexión
Identificar en el medio que nos rodea triángulos oblicuángulos.
Conceptualización
Triángulos Oblicuángulos
Ley de los senos
Demostración de la Ley de los Senos
Aplicación de la ley de los Senos
Ley de los Cosenos</td><td>Texto
Elementos del medio
Gráficos
Proyector
Internet</td><td>Indicador esencial de evaluación.
Identifica los triángulos oblicuángulos señalando sus características.
Indicadores de logro:
Resuelve ejercicios cotidianos que involucren triángulos oblicuángulos.
Aplica la ley del seno o coseno según el caso en la resolución de problemas cotidianos.</td><td>• Trabajos individuales.
• Trabajos grupales.
• Cuestionarios
• Organizadores gráficos</td></tr>
</table>

	Demostración de la Ley de los Cosenos para uno de sus lados Aplicación de la Ley de los Cosenos. **Aplicación** Resolver triángulos oblicuángulos. Resolver ejercicios aplicando la ley de senos y cosenos.			

DOCENTE

DESARROLLO DEL TEMA

TEMA: Resolución de triángulos oblicuángulos: leyes de senos, cosenos y tangentes

OBJETIVO GENERAL:

- Resolver triángulos oblicuángulos aplicando las diferentes fórmulas y criterios aprendidos.

DESTREZAS CON CRITERIO DE DESEMPEÑO:

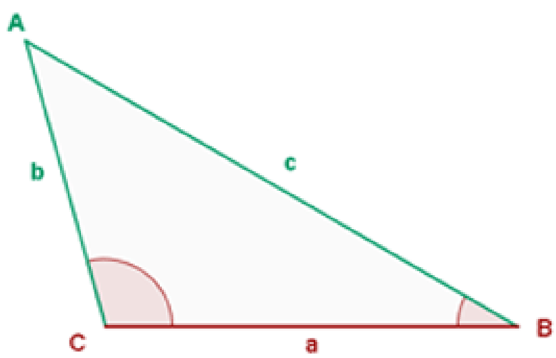
- Identificar y resolver los triángulos oblicuángulos.
- Realizar operaciones de cálculo según los datos que se obtengan.

  Resolver problemas cotidianos en los cuales intervengan triángulos oblicuángulos

CONSTRUCCIÓN DEL CONOCIMIENTO:

TRIÁNGULO OBLICUÁNGULO

Un triángulo oblicuángulo es aquel que no es recto ninguno de sus ángulos, por lo que no se puede resolver directamente por el teorema de Pitágoras, el triángulo oblicuángulo se resuelve por leyes de senos y de cosenos, así como el que la suma de todos los ángulos internos de un triángulo suman 180 grados.



Dependiendo de la información que se tiene en el problema, se puede distinguir cuatro casos importantes:

<u>Caso 1:</u> Se conoce dos lados y el ángulo comprendido entre ellos. En este caso existe siempre una solución única.

<u>Caso 2:</u> Se conoce dos ángulos y un lado, en este tipo de problemas siempre encontramos una solución única.

<u>Caso 3:</u> Se conocen los tres lados. Tiene solución única.

<u>Caso 4:</u> Se conocen dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos. Este caso se llama caso ambiguo, ya que puede tener una o dos o ninguna solución.

Para resolver este tipo de problemas, existe una herramienta muy importante llamada Ley de Seno y Ley de Cosenos.

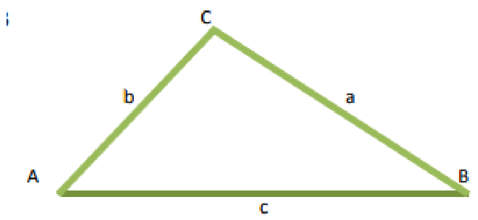
LEY DE LOS SENOS

La ley de los Senos dice que en todo triángulo se cumple que los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos. O sea:

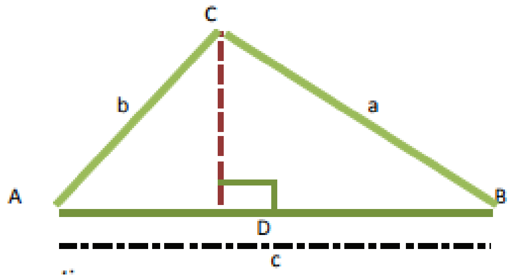
$$\frac{a}{sen\ A} = \frac{b}{sen\ B} = \frac{c}{sen\ C}$$

Demostración de la Ley de los Senos

Para entender la proporción de la Ley de los Senos, se parte de un triángulo cualquiera ABC, como se muestra en la figura:



El triángulo de la figura anterior, se puede llevar a dos triángulos donde cada uno forme un triángulo rectángulo de la siguiente manera:



Como el triángulo ADC es un triángulo rectángulo, se tiene que:

$$sen\ A = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} = \frac{CD}{b}$$

El triángulo CDB también es un triángulo rectángulo; de ahí que

$$sen\ B = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa} = \frac{CD}{a}$$

Con las dos ecuaciones se forman dos ecuaciones y se soluciona por sistema de ecuaciones, despejando CD y usando el método de igualación obtenemos:

$$CD = b\ sen\ A$$

$$CD = a\ sen\ B$$

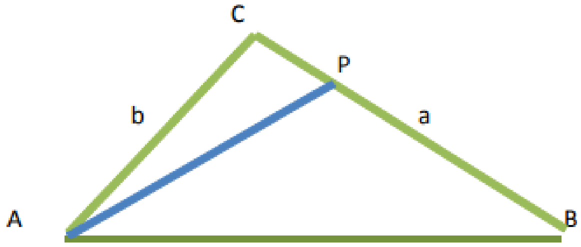
Igualando las ecuaciones tenemos:

$$a\ sen\ B = b\ sen\ A$$

La misma que se puede expresar así:

$$\frac{a}{sen\ A} = \frac{b}{sen\ B}$$

Para la razón de c con Sen C, se traza otra de las alturas del triángulo como se muestra en la figura:



Como el triángulo APC es un triángulo rectángulo, se tiene que:

$$sen\ C = \frac{AP}{b}$$

$$AP = b\ sen\ C$$

$$AP = c\ sen\ B$$

$$b\ sen\ C = c\ sen\ B$$

$$\frac{b}{sen\ B} = \frac{c}{sen\ C}$$

Por último se conectan las igualdades obtenidas y se establece la ley de senos:

$$\boxed{\frac{a}{sen\ A} = \frac{b}{sen\ B} = \frac{c}{sen\ C}}$$

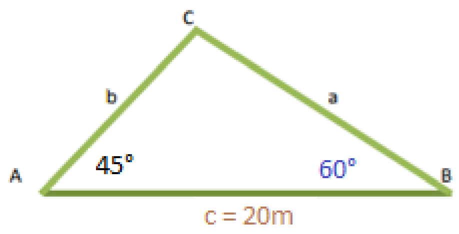
APLICACIÓN DE LA LEY DE LOS SENOS

La ley de los senos se aplica en la resolución de diferentes ejercicios en los cuales se analizan los datos que se tienen y se hace uso de despejes y reemplazos según el caso.

Se conoce dos ángulos y un lado: Para resolver el ejercicio se halla la medida del tercer ángulo teniendo en cuenta que la suma de los tres ángulos internos mide 180º y aplicando la ley de los Senos se halla los otros lados.

Ejemplo:

Completar los datos del triángulo si se tienen los siguientes datos: A= 45º B= 60º c= 20m



Para hallar el ángulo C:

$$C = 180° - 45° - 60° = 75°$$

Y para los demás elementos hacemos uso de la ley de senos:

$$\frac{a}{sen\ 45°} = \frac{c}{sen\ 75°}$$

$$a = \frac{c\ sen\ 45°}{sen\ 75°} = \frac{20\ sen\ 45°}{sen\ 75°} = 14{,}64$$

$$\frac{a}{sen\ 45°} = \frac{b}{sen\ 60°}$$

$$b = \frac{a\ sen\ 60°}{sen\ 45°} = \frac{14{,}64\ sen\ 60°}{sen\ 45°} = 17{,}93$$

LEY DE LOS COSENOS

Es la generalización del teorema de Pitágoras en los triángulos no rectángulos; relaciona el tercer lado de un triángulo con los dos primeros y con el coseno del ángulo formado por estos dos lados. En todo triángulo se cumple que el cuadrado de la longitud de uno de los lados es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el doble productos de estos lados por el coseno del ángulo que forman. Matematizando el enunciado o ley, queda:

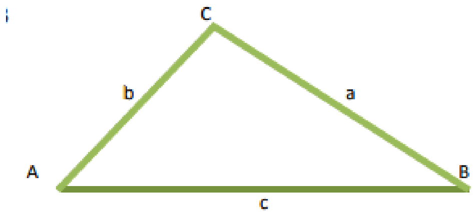
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$

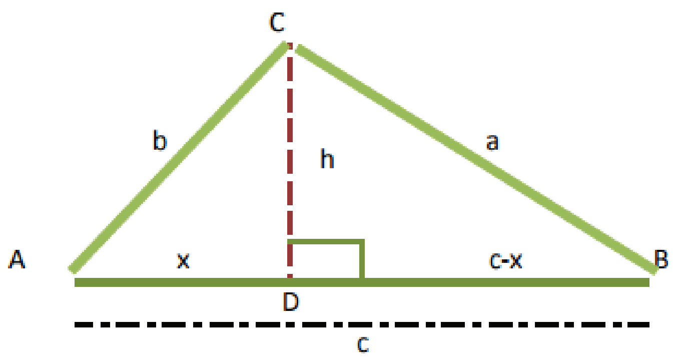
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

DEMOSTRACIÓN DE LA LEY DE LOS COSENOS PARA UNO DE SUS LADOS:

Para entender Ley de los Cosenos, se parte de un triángulo cualquiera ABC, como se muestra en la figura:



El triángulo de la figura anterior, se puede llevar a dos triángulos donde cada uno forme un triángulo rectángulo, quedando de la siguiente manera:



$$h^2 = b^2 - x^2$$

$$h^2 = b^2 - (c - x)^2$$

$$a^2 - (c-x)^2 = b^2 - x^2$$

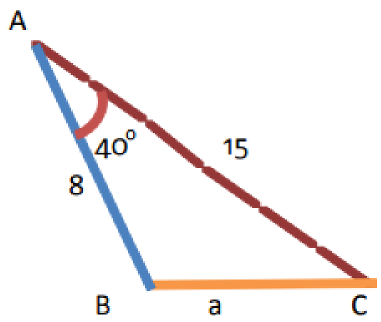
$$a^2 - (c-x)^2 = b^2 - x^2$$

$$a^2 - c^2 + 2cx - x^2 = b^2 - x^2$$

$$a^2 = b^2 - x^2 + c^2 - 2cx + x^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cx$$

En el triángulo ADC tenemos:



$$\cos A = \frac{x}{b}$$

$$x = b\cos A$$

Y reemplazando:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cx$$

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2cb\cos A}$$

APLICACIÓN DE LA LEY DE LOS COSENOS

La ley de los senos se aplica en la resolución de diferentes ejercicios en los cuales se analizan los datos que se tienen y se hace uso de despejes y reemplazos según el caso.

Ejemplo:

- Resolver el triángulo ABC de la siguiente figura:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cb\cos A$$

$$a^2 = 15^2 + 8^2 - 2(15)(8)\cos 40°$$

$$\boldsymbol{a = \sqrt{105.15} = 10,25}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$

$$15^2 = (10{,}25)^2 + 8^2 - 2(10{,}25)(8)\cos B$$

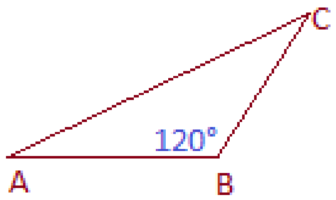
$$\cos B = \frac{15^2 - 10{,}25^2 - 8^2}{-2(10{,}25)(8)} = -0{,}3411$$

$$\boldsymbol{B = \cos^{-1}(-0,3411) = 109,94°}$$

$$\boldsymbol{C = 180° - 109,94° - 40° = 30,33°}$$

- Tres puntos A, B y C están unidos por carreteras rectas y llanas. La distancia AB es de 6 Km., la BC es 9 Km. y el ángulo que forman AB y BC es de 120°. ¿Cuánto distan A y C?.

$$AC = 6^2 + 9^2 - 2(6)(9)\cos 120°$$



$$AC = 171\ km$$

EVALUACIÓN

Según lo aprendido conteste las siguientes preguntas, debe marcar una sola respuesta en las preguntas de selección, solo en aquellas que se indique que resuelva deberá hacer los cálculos necesarios.

Buenas Suerte ☺

a) Un triángulo oblicuángulo es aquel que no es recto ninguno de sus ángulos, por lo que no se puede resolver directamente por el teorema de Pitágoras.

( ) Verdadero

( ) Falso

b) La suma de todos los ángulos internos de un triángulo suman 180 grados

( ) Verdadero

( ) Falso

c) La ley de los senos se aplica a los triángulos rectángulos

( ) Verdadero

( ) Falso

d) Indique la fórmula demostrada de la Ley de los Senos

…………………………………………………………….

e) Indique las fórmulas establecidas por la Ley de los cosenos:

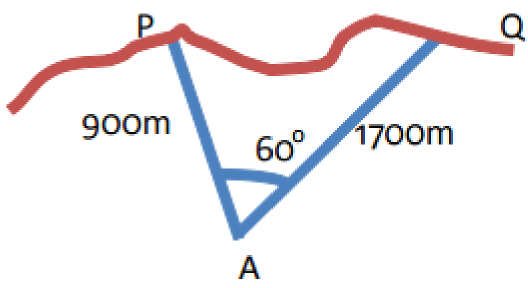
………………………………

………………………………

……………………………...

Resuelva:

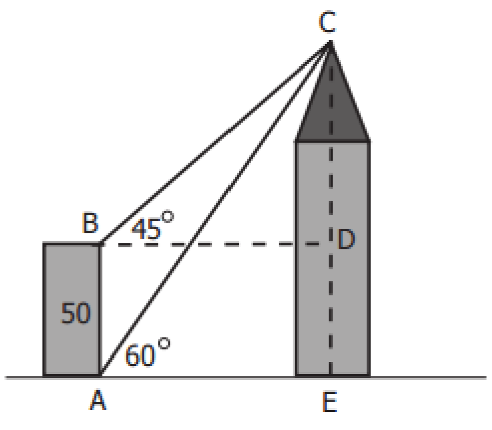
f) Determinar la distancia que separa los cabos ubicados en los puntos P y Q sabiendo que la distancia de A hasta P es de 900m, la distancia de A hasta Q es de 1700 m y el ángulo PAQ es de 50º.



g) Al ver el punto más alto de un rascacielos desde la azotea de un edificio de 50 pies de altura, el ángulo de elevación es de 45º. Si se observa desde el nivel de la calle, el ángulo de elevación es de 60º.

a. Calcular la distancia más corta entre las azoteas de las dos construcciones.

b. Calcular la altura del rascacielos.



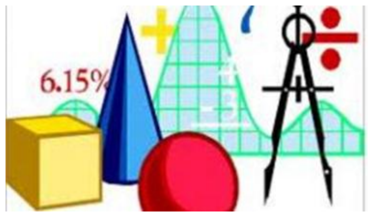
• UNIDAD II: ANÁLISIS TRIGONOMÉTRICO

- ✓ Seno, coseno, tangente, cotangente de la suma y diferencias de los ángulos Suma y diferencias de los ángulos
- ✓ Funciones trigonométricas de los ángulos dobles, triples y múltiples
- ✓ Funciones trigonométricas del ángulo mitad
- ✓ Suma y diferencia de senos y cosenos transformados en productos
- ✓ Demostraciones de igualdades e identidades trigonométricas.
- ✓ Ecuaciones trigonométricas sencillas
- ✓ Sistemas de ecuaciones trigonométricas
- ✓ Inecuaciones trigonométricas sencillas

$$x + 2y \geq 4$$
$$2x + y \geq 5$$

La trigonometría es una rama de la matemática, cuyo significado etimológico es 'la medición de los triángulos'. Deriva de los términos griegos τριγωνος trigōnos 'triángulo' y μετρον metron 'medida'.1

En términos generales, la trigonometría es el estudio de las razones trigonométricas: seno, coseno; tangente, cotangente; secante y cosecante. Interviene directa o indirectamente en las demás ramas de la matemática y se aplica en todos aquellos ámbitos donde se requieren medidas de precisión. La trigonometría se aplica a otras ramas de la geometría, como es el caso del estudio de las esferas en la geometría del espacio.



https://es.wikipedia.org/wiki/Trigonometr%C3%ADa

DESTREZAS GENERALES

CONCEPTUAL
El desarrollo, el conocimiento y reconocimiento de los conceptos matemáticos (su significado y su significante), sus representaciones diversas (incluyendo la lectura e interpretación de su simbología), sus propiedades y las relaciones entre ellos y con otras ciencias.

CALCULATIVA O PROCEDIMENTAL.
Procedimientos, manipulaciones simbólicas, algoritmos, cálculo mental.

MODELIZACIÓN.
La capacidad de representar un problema no matemático (la mayoría de las veces) mediante conceptos matemáticos y con el lenguaje de la matemática, resolverlo y luego interpretar los resultados obtenidos para resolver el problema

PLAN DE CLASE

ÁREA: **DOCENTE:**

SEMESTRE: Tercero **PARALELO:** A.

SECCIÓN:

COMPETENCIA: Desarrollar el pensamiento lógico matemático para interpretar y resolver problemas del contexto.

EJE DE APRENDIZAJE: El razonamiento, la demostración, la comunicación las conexiones y/o la representación.

UNIDAD 2: Análisis Trigonométrico

TEMA: Seno, coseno, tangente, cotangente de la suma y diferencias de los ángulos

OBJETIVO GENERAL:

- Aplicar las leyes de seno, coseno y tangente al sumar o restar dos ángulos.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

- Resolver ejercicios de suma y resta de ángulos, aplicando los criterios aprendidos.
- Relacionar las leyes de solución entre ellas para la simplificación de expresiones.

Destreza con criterio de desempeño	Actividades	Recursos	Evaluación	
			Indicador Esencial/ indicadores de logro	**Técnica/ Instrumento**
• Identificar y resolver problemas que involucran suma y resta de ángulos. • Resolver operaciones transformando a los ángulos base. • Realizar operaciones de cálculo según los datos que se obtengan.	**Experiencia** Lluvia de ideas acerca de cómo se resolvería la suma o resta de ángulos. **Reflexión** Conocer las leyes de resolución del seno, coseno y tangente de la suma y resta de dos ángulos. **Conceptualización** Suma de ángulos: seno, coseno y tangente. Resta de ángulos: seno, coseno y tangente. **Aplicación** Resolver ejercicios que impliquen la	Texto Elementos del medio Gráficos Proyector Internet	**Indicador esencial de evaluación**. Identifica las leyes de seno, coseno y tangente aplicables en la suma y resta de ángulos. **Indicadores de logro**: Resuelve ejercicios que involucren la aplicación de las leyes de seno, coseno y tangente en la suma o resta de ángulos.	• Trabajos individuales. • Trabajos grupales. • Cuestionarios • Organizadores gráficos

	suma o la resta de ángulos.			

DOCENTE

<u>**DESARROLLO DEL TEMA**</u>

TEMA: Seno, coseno, tangente, cotangente de la suma y diferencias de los ángulos.

OBJETIVO GENERAL:

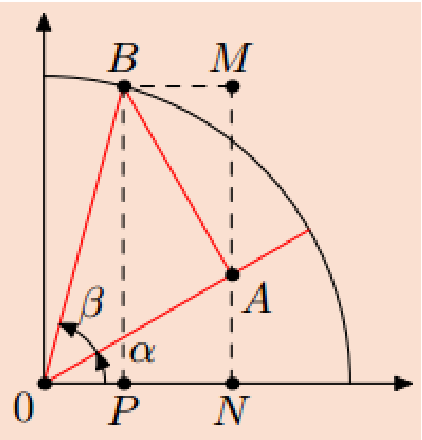
- Aplicar las leyes de seno, coseno y tangente al sumar o restar dos ángulos.

DESTREZAS CON CRITERIO DE DESEMPEÑO:

- Identificar y resolver problemas que involucran suma y resta de ángulos.
- Resolver operaciones transformando a los ángulos base.
- Realizar operaciones de cálculo según los datos que se obtengan

CONSTRUCCIÓN DEL CONOCIMIENTO:

SUMA DE ÁNGULOS: Se trata de calcular las razones $(\alpha+\beta)$ en función de $\alpha \, y \, \beta$.



En la figura se tiene que $OA = \cos\beta$ y $AB = \operatorname{sen}\beta$

Se tiene así, que:

$$
\begin{aligned}
sen(\alpha+\beta) &= PB = NM \\
&= NA + AM \\
&= OA\ sen\alpha + AB\ cos\alpha \\
&= sen\alpha cos\beta + cos\alpha sen\beta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
cos(\alpha+\beta) &= OP = ON - PN \\
&= ON - BM \\
&= OA\cos\alpha - AB\ sen\alpha \\
&= cos\beta cos\alpha + sen\beta sen\alpha\beta
\end{aligned}
$$

Para calcular $tan\,(\alpha+\beta)$ realizamos el cociente del seno entre el coseno:

$$tan\ (\alpha+\beta)=\frac{sen\ (\alpha+\beta)}{cos\ (\alpha+\beta)}$$

$$=\frac{sen\alpha cos\beta+cos\alpha sen\beta}{cos\beta cos\alpha+sen\beta sen\alpha\beta}$$

Diviendo por $cos\beta cos\alpha$:

$$tan\ (\alpha+\beta)=\frac{tan\ \alpha+\tan\beta}{1-\ tan\ \alpha\tan\beta}$$

De ésta forma obtenemos las siguientes leyes:

$$\boldsymbol{sen(\alpha+\beta)=sen\alpha cos\beta+cos\alpha sen\beta}$$

$$\boldsymbol{cos(\alpha+\beta)=cos\beta cos\alpha+sen\beta sen\alpha\beta}$$

$$\boldsymbol{tan\ (\alpha+\beta)=\frac{tan\ \alpha+\tan\beta}{1-\ tan\ \alpha\tan\beta}}$$

Ejercicios:

- A partir de 30° y 45°obtener el valor exacto de sen 75°, cos 75° y tan 75°.

$$sen\ 75°=sen(30°+45°)=sen30°cos45°+cos30°sen45°$$

$$=\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

$$cos\ 75°=cos(30°+45°)=cos30°cos45°-sen30°sen45°$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} . \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\tan 75° = tan(30° + 45°) = \frac{\tan 30° + \tan 45°}{1 - \tan 30° \tan 45°}$$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} + 1}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1}$$

DIFERENCIA DE ÁNGULOS: Utilizando las razones de los ángulos opuestos y utilizando las fórmulas para la suma de ángulo se obtiene:

$$sen(\alpha - \beta) = sen[\alpha + (-\beta)]$$
$$= sen\alpha \cos(-\beta) + cos\alpha sen(-\beta)$$
$$= sen\alpha cos\beta - cos\alpha sen\beta$$

$$cos(\alpha - \beta) = cos[\alpha + (-\beta)]$$
$$= cos\alpha \cos(-\beta) - sen\alpha sen(-\beta)$$
$$= cos\alpha cos\beta + sen\alpha sen\beta$$

$$tan(\alpha - \beta) = tan[\alpha + (-\beta)]$$
$$= \frac{\tan \alpha + \tan(-\beta)}{1 - tan\alpha \tan(-\beta)}$$
$$= \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + tan\alpha tan\beta}$$

Resumiendo tenemos:

$$sen\ (\alpha - \beta) = sen\alpha cos\beta - cos\alpha sen\beta$$

$$cos\ (\alpha - \beta) = cos\alpha cos\beta + sen\alpha sen\beta$$

$$tan\ (\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + tan\alpha tan\beta}$$

Ejemplo:

- A partir de 30° y 45° halar sen 15° y cos 15°.

$$sen\ 15° = sen(45° - 30°) = sen45°cos30° - cos45°sen30°$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$cos\ 15° = cos(45° - 30°) = cos45°cos30° + sen30°sen45°$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

- Simplificar la expresión cos(θ − 3π 2)

Solución

Usando la fórmula del Coseno de la diferencia de dos ángulos:

$$co\,s(\theta - 3\pi 2) = co\,s(\theta)\,co\,s\ \ (3\pi\ 2) + sen\ (\theta) sen\ (3\pi\ 2)$$
$$= co\,s(\theta\ )\ \ (0) + sen(\theta\ )(-1)$$

$$= -sen\ (\theta)$$

- Simplificar la expresión :

$$sen\,a \cdot sen(b-c) - sen\,b \cdot sen(a-c) + sen\,c \cdot sen(a-b)$$

Como: $sen(b-c) = sen\,b \cdot \cos c - \cos b \cdot sen\,c$

$sen\,(a-c) = sen\,a \cdot \cos c - \cos a \cdot sen\,c$

$sen\,(a-b) = sen\,a \cdot \cos b - \cos a \cdot sen\,b$

Sustituyendo, se tiene:

Sena.sen (b- c) – senb.sen(a-c) + senc.sen(a-b) =

Sena.(senb.cosc – cosb.senc) - senb.(sena.cosc-cosa.senc)+senc.(sena.cosb-cosa.senb)=

~~Sena.senb.cosc~~-~~sena.cosb.senc~~-~~senb.sena.cosc~~+~~senb.cosa.senc~~+~~senc.sena.cosb~~-~~senc.cosa.senb~~ = 0

EVALUACIÓN

Según lo aprendido conteste las siguientes preguntas, debe marcar una sola respuesta en las preguntas de selección, solo en aquellas que se indique que resuelva deberá hacer los cálculos necesarios.

Buena Suerte ☺

a) El seno de la suma de dos ángulos es igual a:

( ) $sen(\alpha + \beta) = sen\alpha cos\beta + cos\alpha sen\beta$

( ) $sen(\alpha + \beta) = sen\alpha cos\beta - \; cos\alpha sen\beta$

( ) $sen(\alpha + \beta) = sen\alpha cos\beta$

( ) $sen(\alpha + \beta) = 2cos\alpha sen\beta$

b) El coseno de la suma de dos ángulos es igual a:

( ) $cos(\alpha + \beta) = cos\beta cos\alpha + sen\beta sen\alpha\beta$

( ) $cos(\alpha + \beta) = cos\beta cos\alpha - sen\beta sen\alpha\beta$

( ) $cos(\alpha + \beta) = 2cos\beta cos\alpha$

( ) $cos(\alpha + \beta) = -sen\beta sen\alpha\beta$

c) Indique si la siguiente ley esta correcta o no:

$$tan\;(\alpha + \beta) = \frac{tan\;\alpha + \tan\beta}{1 - \;tan\;\alpha \tan\beta}$$

( ) Correcta

( ) Incorrecta

d) El coseno de la resta de dos ángulos es igual:

( ) $cos\;(\alpha - \beta) = cos\alpha cos\beta + sen\alpha sen\beta$

( ) $cos\;(\alpha - \beta) = -cos\alpha cos\beta + sen\alpha sen\beta$

( ) $cos\;(\alpha - \beta) = 2cos\alpha cos\beta + sen\alpha sen\beta$

( ) $cos\;(\alpha - \beta) = cos\alpha cos\beta + 3sen\alpha sen\beta$

e) Verificar la identidad:

$$tan\,(x - \pi\ 4) = tan\,(x) - 1\ tan\,(x) + 1$$

f) Calcula el valor de sen 115° en base a los ángulos aprendidos :

PLAN DE CLASE

ÁREA: **DOCENTE:**

SEMESTRE: Tercero **PARALELO:** A.

SECCIÓN:

COMPETENCIA: Desarrollar el pensamiento lógico matemático para interpretar y resolver problemas del contexto.

EJE DE APRENDIZAJE: El razonamiento, la demostración, la comunicación las conexiones y/o la representación.

UNIDAD 2: Análisis Trigonométrico

TEMA: Funciones trigonométricas de los ángulos dobles, triples y múltiples.

OBJETIVO GENERAL:

- Identificar las identidades de ángulos dobles, triples y múltiples.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

- Presentados y estudiados los conceptos y las destrezas básicas necesarias, cada estudiante deducirá con un mínimo de error las identidades del ángulo doble y del ángulo medio.
- Presentados diferentes problemas, cada estudiante aplicará sin error las identidades trigonométricas del ángulo doble y del ángulo medio, para simplificar expresiones.

Destreza con criterio de desempeño	Actividades	Recursos	Evaluación	
			Indicador Esencial/ indicadores de logro	**Técnica/ Instrumento**
• Identificar y resolver problemas que involucran ángulos dobles y triples. • Resolver operaciones transformando a los ángulos base. • Realizar operaciones de cálculo según los datos que se obtengan.	**Experiencia** Intercambio de criterios acerca de que es un ángulo doble. **Reflexión** Conocer las leyes de resolución del seno, coseno y tangente de la suma y resta de dos ángulos. **Conceptualización** Identidades del ángulo doble. Identidades del ángulo triple. Ángulos múltiples **Aplicación** Resolver ejercicios que involucren ángulos dobles, triples y múltiples.	Texto Elementos del medio Gráficos Proyector Internet	**Indicador esencial de evaluación**. Identifica un ángulo, doble , triple y múltiple y los diferencia. **Indicadores de logro**: Resuelve ejercicios que involucren la aplicación de las identidades de los ángulos dobles, triples y múltiples.	• Trabajos individuales. • Trabajos grupales. • Cuestionarios • Organizadores gráficos

----

DOCENTE

DESARROLLO DEL TEMA

TEMA: Funciones trigonométricas de los ángulos dobles, triples y múltiples.

OBJETIVO GENERAL:

- Identificar las identidades de ángulos dobles, triples y múltiples.

DESTREZAS CON CRITERIO DE DESEMPEÑO:

- Identificar y resolver problemas que involucran ángulos dobles y triples.
- Resolver operaciones transformando a los ángulos base.
- Realizar operaciones de cálculo según los datos que se obtengan.

CONSTRUCCIÓN DEL CONOCIMIENTO

Como ya se ha analizado hasta ahora, muchas fórmulas se derivan del círculo trigonométrico y su aplicación a ángulos dobles o triples no es más que la aplicación de identidades que ya se conocen. Así pues tenemos:

IDENTIDADES DE ÁNGULOS DOBLES:

Ya conocemos que:

Sen(x+y) = senx cosy+cosx seny (I)

Como 2x = x +x podemos decir que: sen2x = sen (x+x)

Si aplicamos la identidad de la suma de ángulos (I) para sen (x+x) obtenemos:

$$sen(x+x) = senx\cos x + \cos x senx = 2senx\cos x$$

Por lo tanto:

$$\boxed{sen2x = 2senx\cos x}$$

De la misma forma les invito a demostrar que:

$$\boxed{\cos 2x = \cos^2 x - sen^2 x}$$

Aplicando para este caso las identidades trigonométricas pitagóricas obtenemos:

$$sen^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow sen^2 x = 1 - \cos^2 x \Rightarrow \cos^2 x = 1 - sen^2 x$$

$$\cos 2x = 1 - sen^2 x - sen^2 x = 1 - 2sen^2 x$$

$$\boxed{\cos 2x = 1 - 2sen^2 x}$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \left(1 - \cos^2 x\right) = \cos^2 x - 1 + \cos^2 x = 2\cos^2 x - 1$$
$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

De forma similar tenemos:

$$\boxed{\tan 2x = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}}$$

IDENTIDADES DE ÁNGULOS TRIPLES:

Sea α un ángulo. Las **razones trigonométricas** del **ángulo triple (3α)** se pueden expresar en función de las razones trigonométricas del ángulo α.

- **Seno del ángulo triple:**

$$\text{sen}\,(3\alpha) = 3\,\text{sen}\,\alpha - 4\text{sen}^3\alpha$$

- **Coseno del ángulo triple:**

$$\cos\,(3\alpha) = 4\,cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

- **Tangente del ángulo triple:**

$$\tan 3\alpha = \frac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1 - 3\tan^2\alpha}$$

SENO DEL ÁNGULO TRIPLE

Por la fórmula del seno del ángulo suma tenemos que:

$$\text{sen}\,(3\alpha) = \text{sen}(\alpha + 2\alpha) = \text{sen}\alpha\cos 2\alpha + \text{sen}2\alpha\cos\alpha$$

Sustituyendo las fórmulas del seno y coseno del ángulo doble tenemos que:

$$sen\ 3\alpha = \text{sen}\alpha(cos^2\alpha - sen^2\alpha) + 2\text{sen}\alpha\cos\alpha\cos\alpha$$

$$= sen\alpha cos^2\alpha - sen^3\alpha + 2\text{sen}\alpha cos^2\alpha$$

Por la identidad fundamental de la trigonometría, sabemos que:

$$cos^2\alpha = 1 - sen^2\alpha$$

$$sen3\alpha = \text{sen}\alpha(1 - sen^2\alpha) - sen^3\alpha + 2\text{sen}\alpha(1 - sen^2\alpha) =$$

$$sen\alpha - sen^3\alpha - sen^3\alpha + 2\text{sen}\alpha - 2sen^3\alpha = 3\ \text{sen}\ \alpha - 4sen^3\alpha$$

Y tendremos el **seno** del **ángulo triple:**

$$\boxed{sen\ 3\alpha = 3\ sen\ \alpha - 4sen^3\alpha}$$

COSENO DEL ÁNGULO TRIPLE

Aplicando la fórmula del coseno del ángulo suma tenemos que:

$$\cos 3\alpha = \cos(\alpha + 2\alpha) = \cos\alpha\cos 2\alpha - \text{sen}\alpha\text{sen}2\alpha$$

Se sustituyen las fórmulas del seno y coseno del ángulo doble, obteniendo:

$$cos3\alpha = \cos\alpha(cos^2\alpha - sen^2\alpha) - \text{sen}\alpha 2\text{sen}\alpha\cos\alpha =$$

$$cos^3\alpha - \cos\alpha sen^2\alpha - 2\cos\alpha sen^2\alpha = cos^3\alpha - 3\cos\alpha sen^2\alpha$$

Por la identidad fundamental de la trigonometría, sabemos que

$$cos^2\alpha = 1 - sen^2\alpha$$

$$\cos 3\alpha = cos^3\alpha - 3\cos\alpha(1 - cos^2\,\alpha) =$$

$$cos^3\alpha - 3\cos\alpha + 3cos^3\alpha = 4cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

Llegando a la fórmula del coseno del ángulo triple:

$$\boxed{cos\ 3\alpha = 4cos^3\ \alpha - 3cos\ \alpha}$$

TANGENTE DEL ÁNGULO TRIPLE

Por la fórmula de la tangente del ángulo suma tenemos que:

$$\tan 3\alpha = \tan(\alpha + 2\alpha) = \frac{\tan\alpha + \tan 2\alpha}{1 - tan\alpha \tan 2\alpha}$$

Sustituyendo por la fórmula de la tangente del ángulo doble se obtiene:

$$\tan 3\alpha = \frac{\tan\alpha + \frac{2\tan\alpha}{1 - tan^2\alpha}}{1 - \tan\alpha\frac{2\tan\alpha}{1 - tan^2\alpha}} = \frac{\frac{\tan\alpha - tan^3\alpha + 2\tan\alpha}{1 - tan^2\alpha}}{\frac{1 - tan^2\alpha - 2tan^2\alpha}{1 - tan^2\alpha}}$$

$$= \frac{\frac{3\tan\alpha - tan^3\alpha}{1 - tan^2\alpha}}{\frac{1 - 3tan^2\alpha}{1 - tan^2\alpha}} = \frac{3\tan\alpha - tan^3\alpha}{1 - 3tan^2\alpha}$$

Y la fórmula de la **tangente** del **ángulo triple:**

$$\tan(3\alpha) = \frac{3\tan\alpha - tan^3\ \alpha}{1 - 3\ tan^2\alpha}$$

EJERCICIOS

Demostrar:

- $\frac{2\cos 3x}{sen\ 2\ x} + \frac{sen\ 2x}{\cos x} = \frac{\cos 2}{sen\ x}$

$$\frac{2\cos 3x}{sen\ 2x}+\frac{sen2x}{cosx}=\frac{\cancel{2}(4cos^3\ x-3\cos x)}{\cancel{2}senx\ cosx}+\frac{2senx\ cosx}{cosx}=\frac{4cos^3\ x-3cos\ x}{senx\ cosx}+\frac{2sen\ x}{1}=$$

$$\frac{4cos^3\ x-3cos\ x+2sen^2xcos\ x}{sen\ x}=\frac{\cancel{cos}\ x(4cos^2\ x-3+2\ sen^2x)}{senx\cancel{cosx}}=\frac{4cos^2x+2sen^2x-3}{senx}=$$

$$\frac{4cos^2x+2(1-cos^2\ x)-3}{sen\ x}=\frac{4cos^2x+2-2\ cos^2\ x-3}{sen\ x}=\frac{2cos^2\ x-1}{sen\ x}=\frac{\cos 2x}{sen\ x}$$

Demostrar:

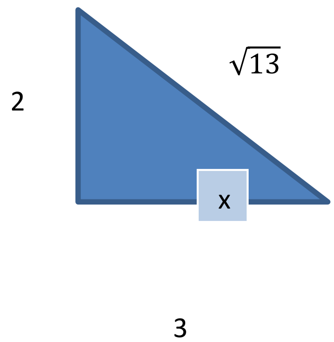
- $\frac{sen\ 2x+2cos^2\ x}{1-sen^2\ x}-2=2\tan x$

$$\frac{sen\ 2x+2cos^2\ x}{1-sen^2\ x}-2=\frac{2\ sen\ x\cos x+2cos^2x}{cos^2}-2=\frac{2\ \cancel{cos}\ x(sen\ x+\cos x)}{\cancel{cos^2}\ x}-2=\frac{2sen\ x+2\cos x}{\cos x}-$$

$$2=\frac{2\ sen\ x}{\cos x}+\frac{2\ \cancel{\cos x}}{\cancel{\cos x}}-2=2\tan x+2-2=2\tan x$$

- Siendo x un ángulo agudo, tal que tan x =2/3, calcule sen 2x.

$$\tan x=\frac{2}{3}$$



$$sen\ 2x=2\ senx\cos x$$

$$sen\ 2x=2.\frac{2}{\sqrt{13}}\frac{2}{\sqrt{13}}=\frac{12}{13}$$

- Demostrar que: $(senx+cosx)^2=1+\ sen2x$

$$sen^2x + 2senxcosx + cos^2x = 1 + sen2x$$

$$1 + 2senxcox = 1 + sen2x$$

$$1 + sen2x = 1 + sen2x$$

EVALUACIÓN

Según lo aprendido conteste las siguientes preguntas, debe marcar una sola respuesta en las preguntas de selección, solo en aquellas que se indique que resuelva deberá hacer los cálculos necesarios.

Buena Suerte ☺

- Siendo x un ángulo agudo tal que ctg x =4, calcule sen2x

  a) $^4/_{15}$

  b) $^4/_{17}$

  c) $^8/_{15}$

  d) $^8/_{17}$

  e) $^{15}/_{17}$

- Si sen β= 1/3 calcule sen 2 β

  a) $\frac{\sqrt{2}}{9}$

  b) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

  c) $\frac{2\sqrt{2}}{9}$

  d) $\frac{4\sqrt{2}}{9}$

  e) $\frac{\sqrt{2}}{6}$

- Si cos β= $\frac{3}{\sqrt{13}}$ calcule 13sen 2 β + 1

  a) 7
  b) 13
  c) 12
  d) 14
  e) 6

- Halle el valor de tag 2x siendo tan x= ¼

  a) $\frac{1}{4}$
  b) $\frac{8}{15}$
  c) $\frac{9}{17}$
  d) $\frac{3}{7}$
  e) $\frac{4}{15}$

- Reducir $J = sen2xsecx - tanxcosx$

- Reducir $C = cos^4x - sen^4x$

PLAN DE CLASE

AREA: **DOCENTE:**

SEMESTRE: Tercero **PARALELO:** A.

SECCIÓN:

COMPETENCIA: Desarrollar el pensamiento lógico matemático para interpretar y resolver problemas del contexto.

EJE DE APRENDIZAJE: El razonamiento, la demostración, la comunicación las conexiones y/o la representación.

UNIDAD 2: Análisis Trigonométrico

TEMA: Funciones trigonométricas del ángulo mitad

OBJETIVO GENERAL:

- Identificar las identidades del ángulo mitad

OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

- Presentados y estudiados los conceptos y las destrezas básicas necesarias, cada estudiante deducirá con un mínimo de error las identidades del ángulo mitad.
- Presentados diferentes problemas, cada estudiante aplicara sin error las identidades trigonométricas del ángulo mitad, para simplificar expresiones.

<table>
<tr><th rowspan="2">Destreza con criterio de desempeño</th><th rowspan="2">Actividades</th><th rowspan="2">Recursos</th><th colspan="2">Evaluación</th></tr>
<tr><th>Indicador Esencial/ indicadores de logro</th><th>Técnica/
Instrumento</th></tr>
<tr><td>• Identificar y resolver problemas que involucran ángulos mitad.
• Resolver operaciones transformando a los ángulos base.
• Realizar operaciones de cálculo según los datos que se obtengan.</td><td>Experiencia
Intercambio de criterios acerca de que es un ángulo mitad
Reflexión
Recordar las identidades trigonométricas que se han aprendido.
Conceptualización
Identidades del ángulo mitad.
Comprobación de identidades.
Aplicación
Resolver ejercicios que involucren ángulos medios.</td><td>Texto
Elementos del medio
Gráficos
Proyector
Internet</td><td>Indicador esencial de evaluación.
Identifica un ángulo mitad y sus utilidades.
Indicadores de logro:
Resuelve ejercicios que involucren la aplicación de las identidades de los ángulos mitad.</td><td>• Trabajos individuales.
• Trabajos grupales.
• Cuestionarios
• Organizadores gráficos</td></tr>
</table>

DOCENTE

DESARROLLO DEL TEMA

TEMA: Funciones trigonométricas del ángulo mitad

OBJETIVO GENERAL:

- Identificar las identidades del ángulo mitad.

DESTREZAS CON CRITERIO DE DESEMPEÑO:

- Identificar y resolver problemas que involucran ángulos mitad.
- Resolver operaciones transformando a los ángulos base.
- Realizar operaciones de cálculo según los datos que se obtengan.

CONSTRUCCIÓN DEL CONOCIMIENTO:

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO MITAD

Sea α un ángulo. Las **razones trigonométricas** del **ángulo mitad (α/2)** se pueden expresar en función de las razones trigonométricas de α. En particular, del coseno de α.

- **Seno** del **ángulo mitad:**

$$\boldsymbol{sen\ \frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - cos\alpha}{2}}}$$

- **Coseno del ángulo mitad:**

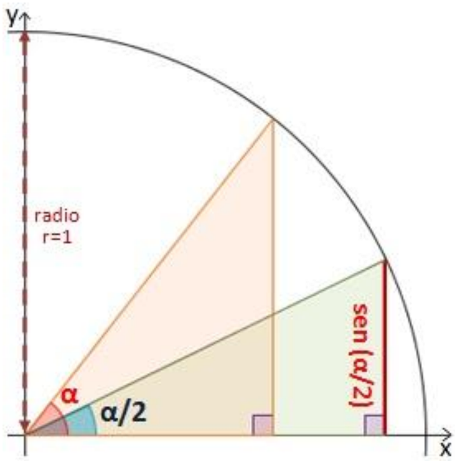
$$\boldsymbol{cos\ \frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + cos\alpha}{2}}}$$

- **Tangente del ángulo mitad:**

    - $\tan\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-cos\alpha}{1+cos\alpha}}$

¿CÓMO SE OBTIENEN?

SENO DEL ÁNGULO MITAD:



De las fórmulas conocidas:

$$1 = sen^2\beta + \ cos^2\beta$$

$$\cos 2\beta = \ cos^2\beta - \ sen^2\beta$$

Si hacemos β=α/2, se transformarán en:

$$1 = \ sen^2\frac{\alpha}{2} + cos^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\cos\alpha = cos^2\frac{\alpha}{2} - \ sen^2\frac{\alpha}{2}$$

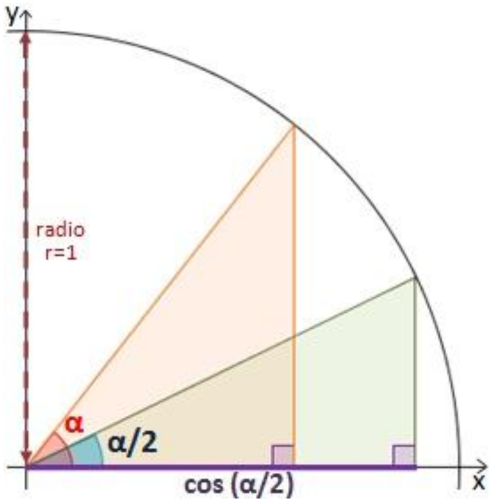
Restando ambas igualdades obtendremos que:

$$1 - \cos\alpha = 2\ sen^2\frac{\alpha}{2} \ \rightarrow \ sen^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - cos\alpha}{2}$$

Por lo que la fórmula del seno del ángulo mitad es:

$$sen\ \frac{\alpha}{2} = \ \pm\sqrt{\frac{1 - cos\alpha}{2}}$$

COSENO DEL ÁNGULO MITAD



De las fórmulas conocidas:

$$1 = sen^2\beta + cos^2\beta$$

$$\cos 2\beta = cos^2\beta - sen^2\beta$$

Si hacemos β=α/2 (de igual forma que con el seno, se transformarán en:

$$1 = sen^2\frac{\alpha}{2} + cos^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\cos\alpha = cos^2\frac{\alpha}{2} - sen^2\frac{\alpha}{2}$$

Sumando ambas igualdades tendremos:

$$1 - \cos\alpha = 2\,cos^2\frac{\alpha}{2} \rightarrow cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 + cos\alpha}{2}$$

Y se obtiene la **fórmula** del **coseno** del **ángulo mitad:**

$$cos\,\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + cos\alpha}{2}}$$

TANGENTE DEL ÁNGULO MITAD

La **tangente** del **ángulo mitad** es igual al seno dividido por el coseno.

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{sen\,\frac{\alpha}{2}}{cos\,\frac{\alpha}{2}} = \frac{\pm\sqrt{\frac{1-cos\alpha}{2}}}{\pm\sqrt{\frac{1+cos\alpha}{2}}} = \pm\sqrt{\frac{\frac{1-cos\alpha}{2}}{\frac{1+cos\alpha}{2}}}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{1-cos\alpha}{1+cos\alpha}}$$

Por lo que la fórmula de la tangente del ángulo mitad es:

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-cos\alpha}{1+cos\alpha}}$$

Ejemplo

Sea un ángulo α=60º. Las razones trigonométricas de su ángulo mitad son:

- **Seno del ángulo mitad (60º/2):**

$$\text{sen}\ \frac{60°}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos 60\,°}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} = 0{,}5 = sen\ 30°$$

- **Coseno** del ángulo mitad (**60º/2**):

$$\cos\frac{60°}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos 60°}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{3}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = 0{,}866 = \cos 30°$$

- **Tangente** del ángulo mitad (**60º/2**):

$$\tan\frac{60\,°}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos 60°}{1+\cos 60°}} = \sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0{,}577 = \tan 30°$$

- Si $sen\ \alpha = \frac{4}{5}$, calculemos $sen 2\alpha$, $\cos 2\,\alpha\ y \tan 2\alpha$

$$sen\ 2\alpha = 2\ sen\ \alpha \cos\alpha$$

$$sen\ 2\alpha = 2 \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{24}{25}$$

$$\cos 2\alpha = cos^2\alpha - sen^2\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \frac{9}{25} - \frac{16}{25} = -\frac{7}{25}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{\frac{24}{25}}{\frac{-7}{25}} = -\frac{24}{7}$$

- Si $sen\ \beta = \frac{1}{4}$, calculemos $sen\ \frac{\beta}{2}$

$$sen\ \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\beta}{2}}$$

$$sen\ \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{4-\sqrt{3}}{8}}$$

EVALUACIÓN

Según lo aprendido conteste las siguientes preguntas, debe marcar una sola respuesta en las preguntas de selección, solo en aquellas que se indique que resuelva deberá hacer los cálculos necesarios.

Buena Suerte ☺

- Encuentre el valor de:

  $\boldsymbol{sen}(\mathbf{22}°\ \mathbf{30}') = \boldsymbol{sen}\ (\frac{\mathbf{45}°}{\mathbf{2}})$

- Sen 25° + sen 25° es igual a sen 50°

  (   ) Verdadero

  (   ) Falso

- Es sen 50° igual a (sen 25°)/ 2

  (   ) Verdadero

  (   ) Falso

- Simplificar la expresión: $\frac{\boldsymbol{sen\ 2\alpha}}{\boldsymbol{tg\ \alpha}}$

PLAN DE CLASE

AREA: **DOCENTE:**

SEMESTRE: Tercero **PARALELO:** A.

SECCIÓN:

COMPETENCIA: Desarrollar el pensamiento lógico matemático para interpretar y resolver problemas del contexto.

EJE DE APRENDIZAJE: El razonamiento, la demostración, la comunicación las conexiones y/o la representación.

UNIDAD 2: Análisis Trigonométrico

TEMA: Suma y diferencia de senos y cosenos transformados en productos**.**

OBJETIVO GENERAL:

- Transformar la suma y diferencia de ángulos a productos.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

- Resolver ejercicios que impliquen la utilización de las formulas establecidas.
- Reducir expresiones a su mínima expresión.
- Convertir una suma o diferencia de funciones trigonométricas en un producto.

Destreza con criterio de desempeño	Actividades	Recursos	Evaluación	
			Indicador Esencial/ indicadores de logro	**Técnica/ Instrumento**
• Resolver operaciones transformando a los ángulos base. • Realizar operaciones de cálculo según los datos que se obtengan. • Aplicar las identidades aprendidas en la resolución de ejercicios.	**Experiencia** Intercambio de criterios acerca de las operaciones que se realizan con los ángulos. **Reflexión** Recordar las identidades trigonométricas que se han aprendido. **Conceptualización** Transformaciones de razones trigonométricas. **Aplicación** Resolver ejercicios que involucren la transformación de ángulos.	Texto Elementos del medio Gráficos Proyector Internet	**Indicador esencial de evaluación**. Identifica los ángulos base. **Indicadores de logro**: Resuelve ejercicios que involucren la transformación de las razones trigonométricas.	• Trabajos individuales. • Trabajos grupales. • Cuestionarios • Organizadores gráficos

----

DOCENTE

DESARROLLO DEL TEMA

TEMA: Suma y diferencia de senos y cosenos transformados en productos**.**

OBJETIVO GENERAL:

- Transformar la suma y diferencia de ángulos a productos.

DESTREZAS CON CRITERIO DE DESEMPEÑO:

- Resolver operaciones transformando a los ángulos base.
- Realizar operaciones de cálculo según los datos que se obtengan.
- Aplicar las identidades aprendidas en la resolución de ejercicios.

CONSTRUCCIÓN DEL CONOCIMIENTO:

TRANSFORMACIÓN DE RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE SUMA EN PRODUCTO

Las **sumas** o **restas** de razones trigonométricas pueden transformarse en el **producto** de éstas**.**

- Transformación de la **suma** de **senos** en **producto:**

$$sen\ \alpha + sen\ \beta = 2\ sen\ \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

- Transformación de la resta de senos en producto:

$$sen\ \alpha - sen\ \beta = 2\ cos\ \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) sen\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

- Transformación de la suma de cosenos en producto:

$$cos\ \alpha + cos\ \beta = -2\ sen\ \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

- Transformación de la resta de cosenos en producto:

$$cos\ \alpha - cos\ \beta = 2\ sen\ \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) sen \left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

Ejemplo

Sea **α=90º** y **β=30º**. Veamos que se verifican las igualdades de las transformaciones de suma a producto.

- **Transformación de la suma de senos en producto:**

$$\text{sen } 90° + \text{sen } 30° = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$sen\ 60° \,.\, \cos 30° = 2\ \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}$$

$$sen\ \left(\frac{90° + 30°}{2}\right) \qquad \cos \left(\frac{90° - 30°}{2}\right)$$

- **Transformación de la resta de senos en producto:**

$$\text{sen } 90° - \text{sen } 30° = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$cos\ 60° \,.\, \text{sen } 30° = 2\ \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$cos\ \left(\frac{90° + 30°}{2}\right) \qquad \text{sen} \left(\frac{90° - 30°}{2}\right)$$

¿CÓMO SE OBTIENEN?

Demostraremos como se obtiene la **fórmula:**

$$\text{sen } \alpha + \text{sen } \beta = 2 \text{ sen } \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cos \left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

De las fórmulas del seno del ángulo suma y ángulo resta tenemos:

$$sen\ (a+b) = sena\ cosb + cosa\ senb$$

$$sen\ (a-b) = sena\ cosb - cosa\ senb$$

Sumando las igualdades obtenemos:

$$sen\ (a+b) + sen\ (a-b) = 2\ sena\ cosb$$

Si transformamos:

$$\left.\begin{aligned} a+b &= \alpha \\ a-b &= \beta \end{aligned}\right\}$$

Entonces, sumando y restando ambas igualdades:

$$2a = \alpha + \beta$$

$$2b = \alpha - \beta$$

$$\boxed{a = \frac{\alpha+\beta}{2} \qquad b = \frac{\alpha-\beta}{2}}$$

Y sustituyendo obtenemos la fórmula:

$$sen\alpha + sen\beta = 2sen\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

TRANSFORMACIÓN DE RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE PRODUCTO EN SUMA

- Transformación del producto del seno de α y β en suma (o resta):

$$sen\ \alpha\ .sen\ \beta = -\frac{1}{2}[cos(\alpha+\beta) - cos(\alpha-\beta)]$$

- Transformación del producto del seno de α y coseno de β en suma (o resta):

$$sen\ \alpha\ .cos\ \beta = \frac{1}{2}[sen(\alpha+\beta) + sen\ (\alpha-\beta)]$$

- Transformación del producto del coseno de α y seno de β en suma (o resta):

$$cos\ \alpha\ .sen\ \beta = \frac{1}{2}[sen(\alpha+\beta) - sen(\alpha-\beta)]$$

- Transformación del producto de cosenos de α y β en suma (o resta):

$$cosa\ .cos\ \beta = \frac{1}{2}[cos(\alpha+\beta) + cos(\alpha-\beta)]$$

Ejemplo

Sea **α=90º** y **β=45º**. Veamos que se verifican las igualdades de las transformaciones de suma a producto.

- Transformación del producto del seno de α y β en suma (o resta):

$$sen\ 90° \, . sen\ 45° = 1.\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$-\frac{1}{2}[\cos 135° - \cos 45°] = -\frac{1}{2}\left[-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right] = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\cos(90° + 45°)$ $\quad\quad$ $\cos(90° - 45°)$

- Transformación del producto del seno de α y coseno de β en suma (o resta):

$$sen\ 90° \, . sen\ 45° = 1.\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$-\frac{1}{2}[\mathrm{sen}\ 135° + sen 45°] = \frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right] = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\mathrm{sen}(90° + 45°)$ $\quad\quad$ $\mathrm{sen}(90° - 45°)$

¿CÓMO SE OBTIENEN?

$$\mathrm{sen}\ \alpha . \mathrm{sen}\ \beta = -\frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)]$$

De las fórmulas del coseno del ángulo suma y ángulo resta tenemos:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - sen\ \alpha\ sen\ \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + sen\ \alpha\ sen\ \beta$$

Restando las igualdades obtenemos:

$$\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha + \beta) = -2\, sen\, \alpha\, sen\, \beta$$

Y pasando el -2 dividiendo obtenemos la fórmula:

$$\text{sen } \alpha . \text{sen } \beta = -\frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)]$$

PLAN DE CLASE

AREA: **DOCENTE:**

SEMESTRE: Tercero **PARALELO:** A.

SECCIÓN:

COMPETENCIA: Desarrollar el pensamiento lógico matemático para interpretar y resolver problemas del contexto.

EJE DE APRENDIZAJE: El razonamiento, la demostración, la comunicación las conexiones y/o la representación.

UNIDAD 2: Análisis Trigonométrico

TEMA: Ecuaciones trigonométricas sencillas

OBJETIVO GENERAL:

- Comprender el concepto de ecuación como una igualdad en la que hay que hallar el valor de la incógnita que la hace verdadera, haciendo uso de funciones.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

- Definir una ecuación trigonométrica y hallar soluciones de las mismas, cada estudiante resolverá correctamente ecuaciones trigonométricas en el intervalo $[0, 2\pi)$.
- Haciendo uso de diferentes técnicas de solución de ecuaciones, cada estudiante determinará sin error la solución general de ecuaciones trigonométricas dadas.

Destreza con criterio de desempeño	Actividades	Recursos	Evaluación	
			Indicador Esencial/ indicadores de logro	**Técnica/ Instrumento**
• Identificar ecuaciones trigonométricas sencillas y resolverlas. • Aplicar los diferentes métodos de resolución de ecuaciones. • Aplicar las ecuaciones al medio que nos rodea en actividades cotidianas.	**Experiencia** Recordar el uso de ángulos y sus usos cotidianos. Lluvia de ideas Intercambio de conceptos previos **Reflexión** Relacionar una actividad cotidiana con ángulos y su importancia.. **Conceptualización** Introducción Resolución de ecuaciones trigonométricas Resolución de ecuaciones trigonométricas usando factorización.	Texto Elementos del medio Gráficos Proyector Internet	**Indicador esencial de evaluación**. Identifica que es una ecuación trigonométrica y el tipo de ángulo que está involucrado en el mismo. **Indicadores de logro**: Despeja una variable sin mayor problema. Resuelve problemas con ecuaciones trigonométricas. Traduce problemas cotidianos al lenguaje matemático usando ecuaciones.	• Trabajos individuales. • Trabajos grupales. • Cuestionarios • Organizadores gráficos

	Aplicación Resolver ejercicios que involucren ecuaciones trigonométricas.			

DOCENTE

DESARROLLO DEL TEMA

TEMA: Ecuaciones Trigonométricas Sencillas

OBJETIVO GENERAL:

- Comprender el concepto de ecuación como una igualdad en la que hay que hallar el valor de la incógnita que la hace verdadera, haciendo uso de funciones.

DESTREZAS CON CRITERIO DE DESEMPEÑO:

- Identificar ecuaciones trigonométricas sencillas y resolverlas.
- Aplicar los diferentes métodos de resolución de ecuaciones.
- Aplicar las ecuaciones al medio que nos rodea en actividades cotidianas.

CONSTRUCCIÓN DEL CONOCIMIENTO:

ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS SENCILLAS

INTRODUCCIÓN

Una ecuación trigonométrica es aquella ecuación en la que aparecen una o más funciones trigonométricas. En las ecuaciones trigonométricas la incógnita es el ángulo común de las funciones trigonométricas. No puede especificarse un método general que permita resolver cualquier ecuación trigonométrica; sin embargo, un procedimiento efectivo para solucionar un gran número de éstas consiste en transformar, usando principalmente las identidades trigonométricas, todas las funciones que aparecen allí en una sola función (es recomendable pasarlas todas a senos o cosenos). Una vez expresada la ecuación en términos de una sola función trigonométrica, se aplican los pasos usuales en la solución de ecuaciones algebraicas para despejar la función; por último, se resuelve la parte trigonométrica, es decir, conociendo el valor de la función trigonométrica de un ángulo hay que pasar a determinar cuál es ese ángulo.

La ecuación trigonométrica es una igualdad que se cumple para ciertos valores del argumento.

Resolver una de estas ecuaciones, significa encontrar el valor del ángulo que satisface dicha ecuación. (A veces es más de un valor).

Ejemplo:

Resolvamos la ecuación trigonométrica para 0º < x < 90º

$$8\, sen\, x = 2 + \frac{4}{\csc x}$$

$$8\, senx = 2 + 4.\frac{1}{\csc x}$$

$$8\, sen\, x = 2 + 4\, sen\, x$$

$$4\, sen\, x = 2 -> sen\, x = \frac{2}{4} \rightarrow x = \sin^{-1}\frac{1}{2} = 30\,°$$

Una ecuación trigonométrica es una ecuación que contiene expresiones trigonométricas y se resuelven usando técnicas similares a las usadas en ecuaciones algebraicas, por lo que las soluciones representaran ángulos.

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Para resolver ecuaciones trigonométricas es necesario despejar el valor de la incógnita, en éste caso resulta ser el valor del ángulo.

Una ecuación trigonométrica se resuelve de manera similar que una ecuación normal, se aplican las mismas estrategias de resolución al despejar una incógnita, el primer paso es reducir todos aquellos términos semejantes, recordando siempre que si un término va de un miembro a otro cambia de operación.

Otro aspecto que se debe considerar el intervalo en cual será evaluada dicha ecuación, recordemos que los ángulos pueden variar según la función.

Ejemplo:

- $\boldsymbol{2\ tg\ x - ctg\ x + 1 = 0}$

$$2tgx - \frac{1}{tg\ x} + 1 = 0$$

$$\frac{2\ tg^2x - 1 + tg\ x}{tg\ x} = 0$$

$$2\ tg^2x + tg\ x - 1 = 0$$

Ahora resolvemos con fórmula general:

$$tg\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(2)(-1)}}{2(2)} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4}$$

$$tg\ x = \frac{1}{2} \rightarrow x = \tan^{-1}\frac{1}{2} = 26,56°$$

$$tg\ x = \frac{-4}{4} \rightarrow x = \tan^{-1} 1 = 45°$$

Como se puede observar se han obtenido dos valores como respuesta.

- Determina el valor del ángulo si se conoce que: 2 cos x $- 1 = 0$

$$2\cos x = 1$$

$$\cos x = \frac{1}{2}$$

$$x = \cos^{-1}\frac{1}{2}$$

$$x = 60°$$

En este caso como resultado tenemos un solo valor, y como se observa todo ejercicio es resuelto en base a técnica aprendidas en temas anteriores.

- Resolver: $sen^2x - \ cos^2x = \frac{1}{4}$

  Haciendo uso de las identidades ya conocidas podemos hacer el siguiente reemplazo:

$$(1 - cos^2x) - \ cos^2x = \ \frac{1}{4}$$

$$1 - 2\ cos^2x = \ \frac{1}{4}$$

$$-2\ cos^2x = \ \frac{1}{4} - 1$$

$$-2\ cos^2x = \ -\frac{3}{4}$$

$$cos^2x = \ \frac{\frac{-3}{4}}{-2} = \ \frac{3}{8}$$

$$\cos x = \ \pm\sqrt{\frac{3}{8}} = \pm 0{,}612$$

  Por lo tanto:

$$x = \ \cos^{-1}(0{,}612) = 52{,}24°$$

$$x = \ \cos^{-1}(-0{,}612) = 127{,}73°$$

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS USANDO FACTORIZACIÓN

Existen ejercicios que implican la utilización de técnicas de factoreo, es así que muchas veces deberás aplicar desde un factor común hasta una diferencia de cubos para poder determinar el valor de la incógnita que en este caso es el ángulo, no se pueden definir una serie de pasos consecutivos que se puedan seguir, más bien depende de la forma de razonar de cada individuo, lo que se sugiere es aplicar los métodos más simples para tratar de eliminar términos y de ésta manera conseguir un ejercicio más fácil.

EJEMPLOS:

- $\boldsymbol{sen\ \theta\ tan\ \theta = sen\ \theta}$

$$sen\ \theta\ tan\ \theta - \ sen\ \theta = 0$$

$$sen\ \theta(\tan\theta - 1) = 0$$

Por lo tanto:

$$sen\ \theta = 0 -> \ \theta = \ \sin^{-1} 0 = 0°$$

$$\tan\theta - 1 = 0 \rightarrow \ \tan\theta = 1 \rightarrow \theta = \tan^{-1} 1 = 45°$$

- $\boldsymbol{4sen^2x\ tan\ x - 4sen^2x - 3tan\ x + 3 = 0}$

$$(4sen^2x\ tan\ x - 4sen^2x) - (3tanx - 3) = 0$$

$$4sen^2x(tan\ x - 1) - (3tanx - 3) = 0$$

$$4sen^2x(tan\ x - 1) - 3(tanx - 1) = 0$$

$$(tanx - 1)(4sen^2x - 3) = 0$$

Por lo tanto:

$$tanx - 1 = 0$$

$$x = \ \tan^{-1} 1 \rightarrow x = 45$$

$$4sen^2x - 3 = 0$$

$$4sen^2x = 3 \rightarrow sen^2x = \frac{3}{4} \rightarrow senx = \pm\sqrt{\frac{3}{4}}$$

$$x = \sin^{-1}\sqrt{\frac{3}{4} = 60°}$$

$$x = \sin^{-1} - \sqrt{\frac{3}{4} = - 60°}$$

- $\boldsymbol{3tanx = 2\ cos\ x}$

$$3\frac{senx}{\cos x} = 2\cos x$$

$$3\ senx = 2cos^2x$$

$$3\ senx = 2(1 - sen^2x)$$

$$3\ senx = 2 - 2sen^2x$$

$$2sen^2x - 3\ senx - 2 = 0$$

Aplicando formula general:

$$senx = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4}$$

$$x = \sin^{-1}\frac{1}{2} = 30°$$

$$x = \sin^{-1} -2 = No\ existe$$

- $\boldsymbol{cosx - 1 = sen\ x}$

$$(cosx - 1)^2 = (sen\ x)^2$$

$$cos^2x - 2cosx - 1 = sen^2x$$

Reemplazamos:

$$cos^2x - 2cosx + 1 = 1 - cos^2x$$

$$2cos^2x - 2cosx = 0$$

$$2cosx(\ cosx - 1) = 0$$

$$2\ cosx = 0 \rightarrow x = \ \cos^{-1} 0 = 90°$$

$$(\ cosx - 1) = 0 \rightarrow x = \cos^{-1} 1 = 0°$$

EVALUACIÓN

Según lo aprendido conteste las siguientes preguntas, debe marcar una sola respuesta en las preguntas de selección, solo en aquellas que se indique que resuelva deberá hacer los cálculos necesarios.

Buena Suerte ☺

- **Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:**

$\boldsymbol{senx(2 - senx) = cos^2x}$

$\boldsymbol{tan^2x + 3 = 2sec^2x}$

$\boldsymbol{tanx(tanx + 2cosx = sec^2x}$

Indica la respuesta correcta

- Al reducir $\frac{secx+tanx-1}{tanx-secx+1} - tanx$, se obtiene

( )Sec x ( )Tan x

( )Cos x ( )Sen x

( )Csc x

- Al simplificar $\frac{1-secx(1+cosx)}{1-cscx(1+senx)}$ tenemos:

( )Sen x ( )1

( )Tan x ( )Ctg x

( )Cos x

- Al resolver la siguiente ecuación trigonométrica cual es el valor del ángulo:

$cosx + 1 = sen\ x$

( ) 60°

( ) 0°

( ) 180°

( ) 45°

( ) Ninguno

PLAN DE CLASE

ÁREA: **DOCENTE:**

SEMESTRE: Tercero **PARALELO:** A

SECCIÓN:

COMPETENCIA: Desarrollar el pensamiento lógico matemático para interpretar y resolver problemas del contexto.

EJE DE APRENDIZAJE: El razonamiento, la demostración, la comunicación las conexiones y/o la representación.

UNIDAD 2: Análisis Trigonométrico

TEMA: Sistema de ecuaciones trigonométricas

OBJETIVO GENERAL:

- Resolver sistemas de ecuaciones trigonométricas

OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

- Identificar los diferentes métodos de resolución de sistemas de ecuaciones.
- Aplicar operaciones de reducción de términos para determinar el valor de las incógnitas.

<table>
<tr><th rowspan="2">Destreza con criterio de desempeño</th><th rowspan="2">Actividades</th><th rowspan="2">Recursos</th><th colspan="2">Evaluación</th></tr>
<tr><th>Indicador Esencial/ indicadores de logro</th><th>Técnica/

Instrumento</th></tr>
<tr><td>• Resolver un sistema de ecuaciones trigonométricas.
• Aplicar técnicas de resolución de sistemas usando los conocimientos adquiridos previamente.</td><td>Experiencia

Recordar el concepto de ecuación.
Lluvia de ideas
Intercambio de conceptos previos
Reflexión

Recordar los métodos de resolución de un sistema de ecuaciones.

Conceptualización

Sistemas de ecuaciones lineales.

Solución de un sistema de ecuaciones lineales

Aplicación

Resolver ejercicios de sistemas de ecuaciones trigonométricas</td><td>Texto

Elementos del medio

Gráficos

Proyector

Internet</td><td>Indicador esencial de evaluación.
Identifica que es un sistema de ecuaciones trigonométricas.
Indicadores de logro:
Resuelve un sistema de ecuaciones trigonométricas aplicando los diferentes métodos de resolución.</td><td>• Trabajos individuales.
• Trabajos grupales.
• Cuestionarios
• Organizadores gráficos</td></tr>
</table>

DOCENTE

DESARROLLO DEL TEMA

TEMA: Sistemas de ecuaciones trigonométricas.

OBJETIVO GENERAL:

- Resolver sistemas de ecuaciones trigonométricas.

DESTREZAS CON CRITERIO DE DESEMPEÑO:

- Resolver un sistema de ecuaciones trigonométricas.
- Aplicar técnicas de resolución de sistemas usando los conocimientos adquiridos previamente.

CONSTRUCCIÓN DEL CONOCIMIENTO:

SISTEMAS DE ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Un sistema de ecuaciones trigonométricas cuando al menos en una de las ecuaciones que la forman es una ecuación trigonométrica. Para resolver los sistemas trigonométricos no siempre sencillo, veamos los tipos de sistemas más frecuentes:

Nota: en las funciones trigonométricas donde aparezcan las incógnitas en ecuaciones no trigonométricas se suponen que están expresadas en radianes.

Sistemas resolubles por los cambio de variable o por reducción. Son sistemas donde aparecen dos razones trigonométricas, tal que podemos hacer el cambio de variable y obtener un sistema de ecuaciones no trigonométricas.

Ejemplos:

$$\begin{cases} \boldsymbol{sen\ 2x + cos\ 3y = 1} \\ \boldsymbol{2\ sen\ 2x + 4\ cos\ 3y = 3} \end{cases}$$

Hacemos el siguiente reemplazo para resolver de una manera más fácil:

$$x = sen\ 2x \qquad y = \cos 3y$$

Por lo tanto nos queda:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 4y = 1 \end{cases}$$

Teniendo un sistema normal de ecuaciones se puede aplicar cualquiera de los métodos aprendidos (sustitución, reducción, determinantes e igualación), el método usado será el que le resulte más fácil al estudiante.

Resolveremos por el método de reducción:

$$\begin{cases} -2x - 2y = -2 \\ 2x + 4y = 1 \end{cases}$$

Y resolviendo tenemos: x= ½ y= ½.

Por lo tanto:

$$sen\ 2x = \frac{1}{2} \rightarrow por\ lo\ tanto\ x\ puedetomar\ los\ valores\ de\ 15°, 75°, 195°\ y\ 255°$$

$$cos\ 3y = \frac{1}{2} \rightarrow por\ lo\ tanto\ x\ puede\ tomar\ los\ valores\ de\ 100°, 220°, 340°\ y\ 20°$$

- Resuelve:

$$\begin{cases} y + cos^2x = 1 \\ 2y + 2sen\ ^2x = 0 \end{cases}$$

De la primera ecuación tenemos : $y = 1 - cos^2x$ y reemplazamos en la segunda ecuación:

$$2(1 - cos^2x) + 2\ sen^2x = 0$$

Y resolviendo tenemos: sen x=0 por lo tanto x= 1 y 180°

$$y = 1 - \ cos^2 x = 0 \, rad = 0°$$

Sistemas donde una ecuación del sistema es resoluble.

En este caso la resolución se vuelve más simple, ya que se puede encontrar un valor casi directamente. Ejemplo:

$$\begin{cases} sen\, x + \cos y = 1 \\ x + y = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

De la segunda ecuación obtenemos: $x = \frac{\pi}{2} - y$

$$sen \ \left(\frac{\pi}{2} - y\right) + cosy = 1$$

$$\to \cos y + cosy = 1 \to cosy = 1/2$$

$$\text{Y=} \begin{cases} 60° + 360°k = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi k \\ 300° + 360°k = \dfrac{5\pi}{3} + 2\pi k \end{cases}$$

$$\text{X=} \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} - \left(\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k\right) = \dfrac{\pi}{6} - 2\pi k \\ \dfrac{\pi}{2} - \left(\dfrac{5\pi}{3} + 2\pi k\right) = \dfrac{-7\pi}{6} - 2\pi k \end{cases}$$

Por lo tanto las soluciones son

$$si\ x = \frac{\pi}{6} - 2\pi K \to y = \frac{\pi}{3} + 2\pi K; si\ x = \frac{-7\pi}{6} - 2\pi k \to y = \frac{5\pi}{3} + 2\pi k$$

EVALUACIÓN

Según lo aprendido conteste las siguientes preguntas, debe marcar una sola respuesta en las preguntas de selección, solo en aquellas que se indique que resuelva deberá hacer los cálculos necesarios.

Buena Suerte ☺

Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + sen^2 y = 2 \\ x + cos^2 y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} senxcosy = 3/4 \\ cosxseny = 1/4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} senx + cosy = 1 \\ x - y = \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$$

$$sen\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

PLAN DE CLASE

ÁREA: **DOCENTE:**

SEMESTRE: Tercero **PARALELO:** A.

SECCIÓN:

COMPETENCIA: Desarrollar el pensamiento lógico matemático para interpretar y resolver problemas del contexto.

EJE DE APRENDIZAJE: El razonamiento, la demostración, la comunicación las conexiones y/o la representación.

UNIDAD 2: Análisis Trigonométrico

TEMA: Inecuaciones trigonométricas de primer grado.

OBJETIVO GENERAL:

- Reconocer y resolver inecuaciones trigonométricas de primer grado.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

- Reconocer las inecuaciones.
- Clasificar las inecuaciones atendiendo a su grado y el número de incógnitas.
- Relacionar las inecuaciones de 1er grado con una incógnita con las gráficas de funciones afines.
- Resolver inecuaciones de 1er con una incógnita.

<table>
<tr><th rowspan="2">Destreza con criterio de desempeño</th><th rowspan="2">Actividades</th><th rowspan="2">Recursos</th><th colspan="2">Evaluación</th></tr>
<tr><th>Indicador Esencial/ indicadores de logro</th><th>Técnica/
Instrumento</th></tr>
<tr><td>• Resolver inecuaciones de trigonométricas de primer grado.
• Transformar problemas cotidianos al lenguaje matemático usando inecuaciones.</td><td>Experiencia
Lluvia de ideas acerca de una desigualdad.
Intercambio de conceptos previos
Reflexión
Generar problemas en los cuales intervengan inecuaciones
Conceptualización
.
Aplicación
Resolver ejercicios de inecuaciones trigonométricas de primer grado.</td><td>Texto
Elementos del medio
Gráficos
Proyector
Internet</td><td>Indicador esencial de evaluación.
Identifica inecuaciones trigonométricas de primer grado.
Indicadores de logro:
Resuelve inecuaciones de primer grado, usando operaciones algebraicas, obteniendo resultados con un mínimo de error.</td><td>• Trabajos individuales.
• Trabajos grupales.
• Cuestionarios
• Organizadores gráficos</td></tr>
</table>

DOCENTE

DESARROLLO DEL TEMA

TEMA: Inecuaciones trigonométricas de primer grado.

OBJETIVO GENERAL:

- Reconocer y resolver inecuaciones trigonométricas de primer grado.

DESTREZAS CON CRITERIO DE DESEMPEÑO:

- Resolver inecuaciones de trigonométricas de primer grado.
- Transformar problemas cotidianos al lenguaje matemático usando inecuaciones.

CONSTRUCCIÓN DEL CONOCIMIENTO:

INECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

En la resolución de inecuaciones se pueden seguir los siguientes criterios:

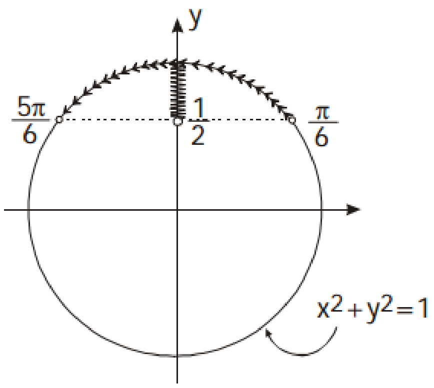
1. Ordenar, acomodar y/o resolver la inecuación de modo que se observe una última inecuación más elaborada en la que se pueda apreciar la presencia de dos funciones (una trigonométrica y la otra una función elemental conocida), en lo posible, claras y graficables manualmente.
2. Las gráficas de las funciones deben estar superpuestas en el mismo sistema coordenado cartesiano.
3. Establecer y/o calcular los puntos de intersección de las gráficas. Éstos se obtienen usando la solución general de la ecuación que resulta de igualar las funciones graficables (dicha solución ya comprende la solución principal de dicha ecuación).
4. A partir de los puntos de intersección de las gráficas, establecer la(s) región(es) (o mejor dicho el(los) intervalo(s)) principal(es) que cumplan con la última inecuación indicada en el criterio 1). Dicho(s) intervalo(s) representan la(s) solución(es) principal(es) de la inecuación propuesta.

5. A partir de la solución principal de la inecuación, teniendo en cuenta el período de la función trigonométrica presente en la última inecuación indicada en el criterio 1) se indica la solución general de la inecuación original (también puede utilizarse el conjunto solución general de todos los arcos que contienen a dicha función trigonométrica)

Ejemplo:

$$sen\ x > \frac{1}{2}$$

Método I: En la circunferencia trigonométrica, ubicamos todos los arcos "x" cuyos senos sean mayores que 1/2, así:



$$sen\ x > \frac{1}{2} \rightarrow \frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$$

El conjunto solución general será:

$$\frac{\pi}{6} + 2\pi k < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi k\ ; \qquad n\ \in Z$$

$$x \in \langle\frac{\pi}{6} + 2n\pi; \frac{5\pi}{6} + 2n\pi\rangle \;\; ; n \in Z$$

Método II:

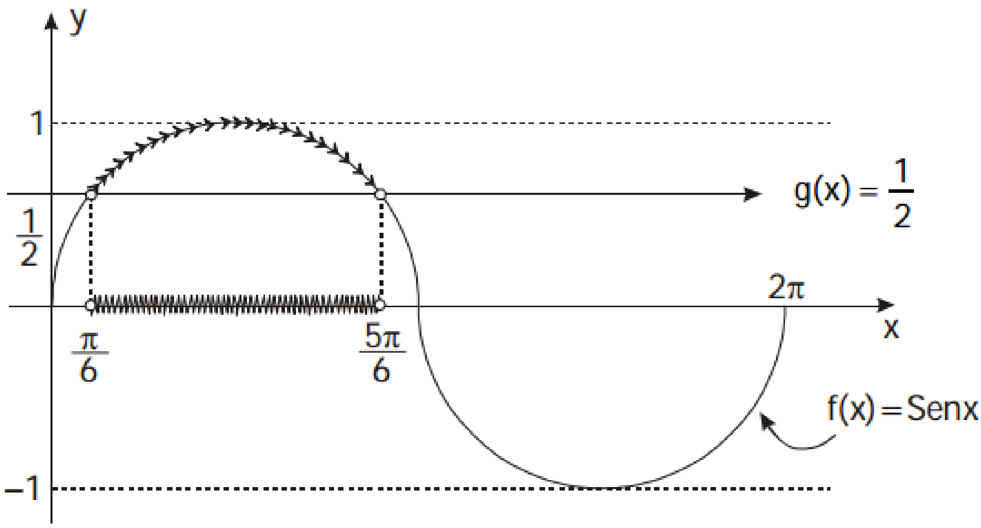
Graficamos en un mismo sistema coordenado las funciones:

$$f(x) = sen\, x \qquad\qquad g(x) = \frac{1}{2}$$

Los puntos de intersección en un período del Senx osea en [0; 2π], se obtienen con:

$$f(x) = g(x) \rightarrow sen\, x = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{6} \quad \text{ó} \quad x = \frac{5\pi}{6}$$



- Resolver $senx > \cos x$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}senx - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x > \frac{1}{\sqrt{2}}(0)$$

Como $sen\ \frac{\pi}{4} = cos\ \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

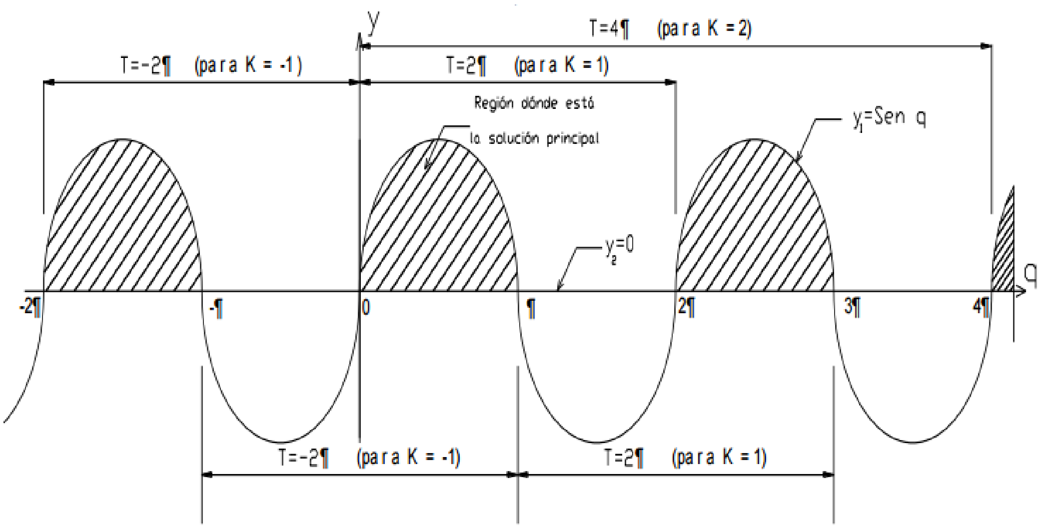
$$cos\ \frac{\pi}{4}senx - sen\frac{\pi}{4}\cos x > 0$$

$$sen\ \left(x - \frac{\pi}{4}\right) > 0$$

Sea $q = x - \frac{\pi}{4}$

Si q>0 entonces y1= sen q y y2=0

Entonces la gráfica conjunta nos queda de la siguiente manera:



EVALUACIÓN

Según lo aprendido conteste las siguientes preguntas, debe marcar una sola respuesta en las preguntas de selección, solo en aquellas que se indique que resuelva deberá hacer los cálculos necesarios.

Buena Suerte ☺

- **Resolver en el intervalo de 0,π la siguiente inecuación:**

$$tan^2x - tanx > 0$$

( ) $\langle \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \rangle$

( ) $\langle 0, \frac{\pi}{4} \rangle$

( ) $\langle \frac{\pi}{4}, \pi \rangle - \left\{ \frac{\pi}{2} \right\}$

( ) $\langle \frac{\pi}{2}, \pi \rangle$

- **Resuelve la siguiente inecuación y determina la solución gráficamente:**

$$\frac{\sqrt{2}cos\, x - 1}{2\, senx + cosx + 7} > 0 \qquad Para\;\; x \in [0;\; \pi]$$

BIBLIOGRAFÍAS:

Para reforzar puedes revisar los siguientes links:

- ALBUJA G., SANTACRUZ M., y VALLEJO P., Geometría Básica. Libro 1, 2 y 3. Nueva edición. Ediciones Rodin.
- BARNETT Raymond, URIBE Julio. Algebra y Geometría. Nueva edición
- CALVACHE G. y otros. Geometría Plana y del Espacio. Nueva edición. Octubre de 2007
- CLEMENS Stanley y otros. Geometría. Nueva edición. Impreso en México
- GRANVILLE ANTHONY y otros, Trigonometría Plana y Esférica. Nueva edición
- GONI Juan. Geometría. Nueva edición..
- KNIGHT S., Trigonometría Elemental. Nueva edición
- HEMMERLING Edwin, Geometría Elemental. Nueva edición. Editorial Limusa. México
- INSTITUTO DE CIENCIAS DE LA ESPOL. Fundamentos Matemáticos. Segunda edición. 2007
- JIMÉNEZ OSUNA, JOSÉ MIGUEL.(2000) Nociones de álgebra y trigonometría Universidad de Léon.
- SULLIVAN Michael. Trigonometría y Geometría Analítica. Cuarta edición. México.
- http://www.slideshare.net/addasaro/sistemas-de-medicion-angular
- http://agrega.hezkuntza.net/visualizar/es/es-eu_2011050213_1310507/false
- http://recursostic.educacion.es/multidisciplinar/itfor/web/sites/default/files/recursos/angulos/sec/actividad_3_los_ngulos_en_la_vida_real.html
- https://www.educ.ar/sitios/educar/recursos/ver?id=14994
- http://www.vitutor.com/al/trigo/trigo_1.html
- https://es.wikipedia.org/wiki/Identidades_trigonom%C3%A9tricas
- http://math2.org/math/trig/es-identities.htm

- http://www.vitutor.com/al/trigo/tri_4_e.html
- https://www.youtube.com/watch?v=dacPI6CUgrs
- http://www.educatina.com/introduccion-a-la-trigonometria/ejercicios/angulos-notables/ejercicio-890
- http://www.educatube.es/circulo-trigonometrico/

Realizado por:

MARIA CRUZ

Año: 2016