UNIVERSIDAD NACIONAL DE CHIMBORAZO

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN, HUMANAS Y TECNOLOGÍAS

CARRERA DE PEDAGOGÍA DE LAS CIENCIAS EXPERIMENTALES: MATEMÁTICAS Y LA FÍSICA

Título del proyecto:

Estrategias metodológicas para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría analítica: sección cónicas

Trabajo de Titulación para optar al título de Licenciado en Pedagogía de las Ciencias Experimentales: Matemáticas y la Física

Autor:

Vega Molina, Karina Elizabeth

Tutor:

Ph.D Mirella Del Pilar Vera Rojas

Riobamba, Ecuador.

2024

DECLARATORIA DE AUTORÍA

Yo, Karina Elizabeth Vega Molina, con cédula de ciudadanía 0604770131, autor (a) del trabajo de investigación titulado: **ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS PARA LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DE LA GEOMETRÍA ANALÍTICA: SECCIÓN CÓNICAS**, certifico que la producción, ideas, opiniones, criterios, contenidos y conclusiones expuestas son de mí exclusiva responsabilidad.

Asimismo, cedo a la Universidad Nacional de Chimborazo, en forma no exclusiva, los derechos para su uso, comunicación pública, distribución, divulgación y/o reproducción total o parcial, por medio físico o digital; en esta cesión se entiende que el cesionario no podrá obtener beneficios económicos. La posible reclamación de terceros respecto de los derechos de autor (a) de la obra referida, será de mi entera responsabilidad; librando a la Universidad Nacional de Chimborazo de posibles obligaciones.

En Riobamba, 23 de julio del 2024.

Vega Molina Karina Elizabeth

C.I: 060477013-1

DICTAMEN FAVORABLE DEL PROFESOR TUTOR

Quien suscribe, **Mirella Del Pilar Vera Rojas** catedrática adscrita a la Facultad de Ciencias la Educación Humanas y Tecnologías, por medio del presente documento certifico haber asesorado y revisado el desarrollo del trabajo de investigación titulado: **ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS PARA LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DE LA GEOMETRÍA ANALÍTICA: SECCIÓN CÓNICAS**, bajo la autoría de Karina Elizabeth Vega Molina; por lo que se autoriza ejecutar los trámites legales para su sustentación.

Es todo cuanto informar en honor a la verdad; en Riobamba, a los 23 días del mes de julio de 2024.

Mirella Vera R.

____

Ph.D Mirella Del Pilar Vera Rojas

C.I: 0602587222

CERTIFICADO DE LOS MIEMBROS DEL TRIBUNAL

Quienes suscribimos, catedráticos designados Miembros del Tribunal de Grado para la evaluación del trabajo de investigación "Estrategias metodológicas para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría analítica: sección cónicas", presentado por Karina Elizabeth Vega Molina, con cédula de identidad número 0604770131, bajo la tutoría de Ph. D Mirella Del Pilar Vera Rojas; certificamos que recomendamos la APROBACIÓN de este con fines de titulación. Previamente se ha evaluado el trabajo de investigación y escuchada la sustentación por parte de su autor; no teniendo más nada que observar.

De conformidad a la normativa aplicable firmamos, en Riobamba a los 30 días del mes de octubre del 2024

Dra. Ximena Zúñiga García

PRESIDENTE DEL TRIBUNAL DE GRADO

Dra. Narcisa Sánchez Salcán

MIEMBRO DEL TRIBUNAL DE GRADO

Dr. Roberto Salomón Villamarín Guevara

MIEMBRO DEL TRIBUNAL DE GRADO

C E R T I F I C A C I Ó N

Que, **VEGA MOLINA KARINA ELIZABETH** con CC: **0604770131**, estudiante de la Carrera de **PEDAGOGÍA DE LAS CIENCIAS EXPERIMENTALES DE LA MATEMÁTICA Y LA FÍSICA**, Facultad de **CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN, HUMANAS Y TECNOLOGÍAS DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DE CHIMBORAZO**; ha trabajado bajo mi tutoría el trabajo de investigación titulado "**ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS PARA LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DE LA GEOMETRÍA ANALÍTICA: SECCIÓN CÓNICAS**", cumple con el 10%, de acuerdo al reporte del sistema Anti plagio **TURNITIN**, porcentaje aceptado de acuerdo a la reglamentación institucional, por consiguiente autorizo continuar con el proceso.

Riobamba, 14 de octubre de 2024

Firmado electrónicamente por:
MIRELLA DEL PILAR
VERA ROJAS

Ph. D Mirella Del Pilar Vera Rojas
TUTORA

AGRADECIMIENTO

Agradezco a Dios por darme la dicha de vivir y gozar de buena salud.

A mis padres Oscar Quinchuela y Gladys Molina, por sus palabras de aliento y apoyo incondicional en cada paso que doy

A mis hermanas Suhany y Arelys Quinchuela, por ser mi fuerza, apoyo moral y emocional.

Agradezco también de manera especial a mi tutora Ph.D Mirella Vera, quien fue mi guía en el proceso brindándome sus conocimientos y apoyo.

Finalmente agradezco a quién me dio fuerza para continuar y me acompaño en mi proceso, mi gratitud y cariño con él.

Karina Elizabeth

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE FIGURAS

RESUMEN

El trabajo de investigación, titulado “Estrategias metodológicas para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría analítica: Sección Cónicas”, se llevó a cabo con los estudiantes de 3er semestre de la carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales de la Matemática y la Física de la Facultad de Ciencias de la Educación, Humanas y Tecnologías de la Universidad Nacional de Chimborazo, durante el periodo académico 2023-2S. El enfoque de la investigación es mixto, diseño explicativo secuencial (DEXPLlS), estudio transversal, investigación de campo, nivel de profundidad descriptivo propositivo. Las técnicas e instrumentos utilizados fueron: la encuesta estructurada aplicada a través de un cuestionario a los estudiantes de la carrera y la entrevista a profundidad aplicada a la docente encargada de la cátedra de geometría analítica. Los datos obtenidos del cuestionario estructurado fueron analizados con ayuda del software Rstudio, mientras que las respuestas obtenidas de la entrevista a profundidad permitieron conocer las perspectivas y la experiencia de la docente. Los resultados de la investigación revelaron que la enseñanza de la geometría analítica, en la sección cónicas, enfrenta desafíos significativos. En particular, se observó un desequilibrio en el enfoque didáctico: se tiende a priorizar excesivamente los aspectos algebraicos, relegando la importancia de los elementos geométricos, promoviendo un aprendizaje memorístico y algorítmico, lo que conlleva problemas a los estudiantes al momento de reconocer ecuaciones, graficar y/o resolver problemas prácticos. Para superar dichas dificultades, se proponen dos estrategias metodológicas para la enseñanza y el aprendizaje de las cónicas denominadas “Descubrimiento –Visualización – Acción”; y “Problematización –Colaboración – Cognición” la una y la otra “Pensamiento – Activación – Socialización”; y “Colaboración - Asistencia – Mente”, con la finalidad de que el docente cuente con recursos didácticos motivantes y el estudiante aumente el interés por aprender, desarrolle el pensamiento crítico, abstracto y resuelva problemas de la vida cotidiana contextualizando lo teórico con lo práctico.

Palabras claves: estrategia metodológica, enseñanza, aprendizaje, geometría analítica, cónicas.

ABSTRACT

The research work, entitled "Methodological strategies for teaching and learning analytical geometry: Conic Sections", was carried out with third semester students of the degree in Pedagogy of Experimental Sciences of Mathematics and Physics of the Faculty of Education, Humanities and Technologies of the National University of Chimborazo, during the academic period 2023-2S. The research approach is characterized by mixed, sequential explanatory design (DEXPLIS), cross-sectional study, field research and descriptive propositional level of depth. The techniques and instruments used were the structured survey, which was applied through a questionnaire to the students of the degree and the in-depth interview applied to the teacher in charge of the analytical geometry course. The Rstudio software analyzed the data from the structured questionnaire, and the in-depth interview responses provided insights into the teacher's perspectives and experiences. The research results revealed that the teaching of analytical geometry, in the conic section, faces significant challenges. An imbalance was observed in the didactic approach: there is a tendency to prioritize algebraic aspects excessively, relegating the importance of geometric elements, and promoting memorization and algorithmic learning, which leads to problems for students when recognizing equations, graphing, and/or solving practical problems. To overcome these difficulties, two methodological strategies are proposed for the teaching and learning of conics called “Discovery – Visualization – Action”; and “Problematization – Collaboration – Cognition” one and the other “Thought – Activation – Socialization”; and “Collaboration - Assistance – Mind”, the aim is for providing the teacher with motivating didactic resources and the student’s interest in learning to be enhanced, developing critical and abstract thinking, and solving everyday life problems by contextualizing the theoretical with the practical.

Keywords: analytical geometry, conics, learning, methodological strategy, teaching.

Firmado electrónicamente por:
JAVIER ANDRES
SALTOS CHACAN

Reviewed by:
Mg. Javier Andrés Saltos Chacán
ENGLISH PROFESSOR
c.c. 0202481438

CAPÍTULO I
INTRODUCCIÓN

Las cónicas constituyen un aspecto importante dentro del estudio de la geometría analítica y, por lo tanto, es esencial tener un vasto conocimiento en este campo, ya que, se la puede observar en nuestra vida cotidiana. Sin embargo, en las universidades se ha venido evidenciado la enseñanza inapropiada de los docentes en esta área del conocimiento hacia los alumnos, "ya sea por falta de capacitación o por una mala metodología empleada por someterse a la enseñanza conductista, dejando de lado nuevas estrategias proporcionadas por la Didáctica Crítica" (Rivera, 2023).

Abordar la enseñanza de la sección cónicas - circunferencia, parábola, elipse e hipérbola - dentro de la geometría analítica de manera clara y estructurada es importante, para que los estudiantes puedan comprender las diferentes formas y características de estas curvas. Además, una buena estrategia metodológica puede facilitar la enseñanza, el aprendizaje, y por ende la retención de información por parte de los estudiantes.

El estudio de las cónicas ayuda a desarrollar habilidades analíticas y de resolución de problemas en los estudiantes, ya que involucra el análisis de ecuaciones y la interpretación geométrica de las mismas. Debido a sus diferentes aplicaciones prácticas, las cónicas están presentes en la vida cotidiana y en diversas áreas del conocimiento como la física, la ingeniería y la astronomía, así, las parábolas están relacionadas con el diseño de antenas parabólicas y faros de automóviles, mientras que las elipses están relacionadas con las órbitas planetarias, de ahí la importancia de su estudio.

La omisión en la aplicación de una adecuada estrategia metodológica en la enseñanza de las secciones cónicas podría acarrear repercusiones significativas en el aprendizaje de los estudiantes y en su comprensión de estos conceptos geométricos avanzados. La falta de estrategias, se traduce en un "desinterés generalizado, una adquisición de conocimientos limitada y una aplicación inadecuada de los principios de las secciones cónicas en contextos prácticos" (Bravo, 2023).

El aplicar una correcta estrategia metodológica en la enseñanza de las cónicas, y el aprendizaje más eficaz que favorezca una mayor implicación por parte del docente y los estudiantes en el proceso de enseñanza y de aprendizaje, fue el motivo para el desarrollo de la presente investigación.

Por lo tanto, este trabajo de titulación se centra en proponer estrategias metodológicas apropiadas para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría analítica: sección cónicas, abordando su pregunta de investigación: ¿Cómo superar las dificultades de aprendizaje mediante la aplicación de estrategias metodológicas en la enseñanza de la geometría analítica: sección cónicas?

Desarrollado en periodo 2023-2S, con el tercer semestre de la carrera Licenciatura en Pedagogía de las Ciencias Experimentales: Matemáticas y la Física en la Universidad Nacional de Chimborazo, beneficiando directamente a estudiantes que se encuentran cursando la cátedra de geometría analítica, así como la docente que imparte esta asignatura.

La investigación tiene un enfoque mixto, puesto que se obtuvieron datos tanto de carácter cuantitativo a través de la aplicación de una encuesta a estudiantes, así como de datos cualitativos mediante la aplicación de entrevistas a profundidad a la docente que imparte la cátedra de geometría analítica.

Finalmente, se indica que el proyecto de investigación se encuentra estructurado de la siguiente manera:

Capítulo I, Está conformado por la introducción, problematización, formulación del problema, objetivos y por último la justificación, en donde, se establece la argumentación de la investigación, se da a conocer el por qué y el para qué se realiza la investigación.

Capítulo II, Incluye el estado del arte relacionado a la temática y el fundamento teórico, conformado por antecedentes que se han dado en la investigación, la teoría necesaria para el desarrollo del proyecto de investigación, en los cuales se aborta temas relacionados a la geometría y estrategias metodológicas.

Capítulo III, Metodología, conformado por el tipo y diseño de la investigación, técnicas de recolección de datos, la población de estudio, tamaño de muestra, método de análisis y procesamiento de datos. Se desarrolla con atención la ejecución del trabajo de investigación.

Capítulo IV, Análisis y discusión, observaciones e interpretaciones de los resultados de la investigación.

Capítulo V, Conclusiones y recomendaciones, corresponde al cierre y la síntesis de la investigación, se establece las recomendaciones que se dan de cada conclusión…

Capítulo VI, Se da a conocer las estrategias metodológicas que aporten positivamente a la enseñanza y aprendizaje de la geometría analítica: Sección Cónicas.

Finalmente se muestra la parte bibliográfica y los anexos que han ayudado en el desarrollo del proyecto de investigación.

1.1 Antecedentes

Los antecedentes son parte esencial del trabajo de investigación, debido a que aportan conocimiento nuevo y significativo. De acuerdo a (García, 2021) son “aquellos trabajos de investigación que preceden al que se está realizando, por lo tanto, están relacionados con el objeto de estudio de la presente investigación”:

El trabajo de investigación de la Universidad Autónoma de México, García (2015) titulado “Estrategia didáctica para la enseñanza y el aprendizaje presentado por realiza el estudio de dos tipos de cónicas: la parábola y la elipse”, con el objetivo de proponer una estrategia didáctica para la enseñanza y el aprendizaje de las dos cónicas. En particular la propuesta se estructura de modo tal que el docente puede optar por cualquier método de construcción de las cónicas, analítica o sintética, siendo lo importante evaluar qué tanto el alumno puede identificar los elementos aprendidos en el contexto de la solución de problemas.

Por lo tanto, el trabajo de investigación considera importante fortalecer, antes de aplicar la propuesta, el compromiso del docente ante el grupo con el fin de lograr un mejor aprendizaje, exigiendo que ellos acepten el reto de aprender y cumplan con la responsabilidad que les corresponde.

Por otra parte el trabajo de investigación de, Pérez y Camatón (2013) de la Escuela Superior Politécnica del Litoral titulado “Elaboración e implementación de una estrategia metodológica para mejorar el aprendizaje de las cónicas basada en problemas por niveles”, tuvo como objetivo proponer y aplicar una estrategia metodológica basada en problemas por niveles, que ayude al estudiante a desarrollar no solo el aprendizaje de la “Cónicas”, sino desarrollar su pensamiento para lo cual implementó un taller con actividades creativas. La investigación presenta una metodología de corte cualitativa.

En sus resultados muestra que en el aprendizaje de las Cónicas, los estudiantes deben manipular material concreto para que descubran por sí solos y a través de las experiencias desarrollen un pensamiento autónomo y crítico. A su vez, el estudio es gradual, porque parte de lo simple a lo complejo (por niveles) para que los estudiantes vayan aprendan con facilidad y estén en condiciones de resolver problemas más complejos.

Finalmente, con la autoría de Suárez Puente (2022) de la Universidad Técnica del Norte, se presenta el trabajo de investigación titulado “Estrategias metodológicas activas para aprendizajes significativos de la cónica “La Parábola” en el segundo año de Bachillerato de la Unidad Educativa Ibarra, de la provincia de Imbabura”, con el objetivo de diseñar estrategias metodológicas activas para su enseñanza y aprendizaje. La investigación presenta una metodología de diseño no experimental, debido a que no manipula variables.

Los resultados de la investigación muestra que el uso de estrategias metodológicas activas dentro de la asignatura de Geometría Analítica es muy limitado debido a que el proceso de enseñanza y de aprendizaje se lo maneja en la mayoría de los casos de manera tradicional, por lo que la implementación de estrategias metodológicas activas dentro del proceso educativo despertó el interés y la curiosidad de los estudiantes al momento de aprender.

1.2 Planteamiento del problema

La “geometría analítica es una rama de la matemática que combina la geometría clásica con el álgebra, permitiendo la representación de figuras geométricas y la resolución de problemas mediante el uso de coordenadas y ecuaciones” (Sánchez et al., 2022). Esta poderosa herramienta matemática establece una conexión entre la geometría y el álgebra, lo que facilita el estudio y la comprensión de formas geométricas y sus relaciones mediante métodos algebraicos.

De acuerdo a Duarte et al. (2021), los conceptos fundamentales pertenecientes a la geometría analítica, dentro de ellos "el estudio de las secciones cónicas, requieren establecer las relaciones necesarias, las formas de representación y las estrategias adecuadas para su enseñanza", lo que se traduce en una necesidad para que dicho concepto sea comprendido, apropiado y asimilado en su totalidad por parte del estudiante.

Ante lo mencionado, el estudio de las cónicas desde la geometría analítica debe presentarse en equilibrio bajo dominios algebraicos y geométricos, ya que, su desbalance puede generar un enfoque de aprendizaje centrado en la algoritmia y la memorización, donde un proceso puede solapar a otro. Es común que, "en contextos donde se trabajan las cónicas desde la geometría analítica, la exigencia a los alumnos se centre en el dominio de las expresiones algebraicas de las cónicas, cuando, la función de las cónicas en la actividad matemática es más ilustrativa, porque ayudan a comprender los elementos en la gráfica" (Advíncula et al., 2021).

De ahí que, en la práctica pedagógica de la enseñanza de cónicas se observa dificultades puesto que a "los estudiantes les resulta difícil reconocer sus ecuaciones y graficar a partir de ellas, así como también resolver problemas de aplicación y describir los elementos a partir de su gráfica" (Sánchez, 2018).

Al parecer, la geometría analítica de acuerdo a Gamboa y Ballestero (2010), se "ha venido impartiendo de forma tradicional, puesto que los docentes centran su enseñanza en la utilización de la pizarra", unido al poco tiempo que se destina para impartir los temas planteados de esta rama de la matemática en el currículo nacional, constituyéndose en limitantes al momento de enseñar.

Por lo tanto, la ausencia de una correcta estrategia metodológica en la enseñanza de esta área del conocimiento, está llevando al estudiante a ver el estudio de las cónicas (circunferencia, parábola, elipse e hipérbola) de forma mecánica, tediosa y de gran dificultad, provocando poco interés y desmotivación por aprender, lo que ha ocasionado un bajo rendimiento en los estudiantes, al dejar a segundo plano el razonamiento lógico. "Además, es importante considerar que las propiedades de las cónicas al no ser obvias a simple vista, también dificultan su comprensión y aplicación" (Vintimilla, 2022).

En el 3er semestre de la carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales de la Matemática y la Física de la Facultad de Ciencias de la Educación, Humanas y Tecnologías de la Universidad Nacional de Chimborazo, no ha sido la excepción, puesto que en las aulas durante el proceso educativo de la Geometría Analítica sección cónicas, se ha evidenciado un estilo de enseñanza que prioriza el geométrico sobre el algebraico, haciendo que el aprendizaje se centre en la algoritmia y la memorización. Como consecuencia, los estudiantes han experimentado dificultades en reconocer ecuaciones, realizar gráficas, resolver problemas de aplicación y describir elementos a partir de representaciones gráficas. La situación se agrava aún más, cuando el tiempo que se asigna para enseñar esta asignatura es limitado, lo que ha generado desinterés y desmotivación de los estudiantes por aprender, traduciéndose en un bajo rendimiento.

1.2.1 Formulación del problema

Una vez identificadas las dificultades de aprendizaje de la geometría analítica: sección cónicas, se busca proponer estrategias metodológicas que faciliten su enseñanza.

¿Cómo superar las dificultades de aprendizaje mediante la aplicación de estrategias metodológicas en la enseñanza de la geometría analítica: sección cónicas?

1.2.2 Preguntas directrices

- ¿Cuáles son las dificultades que presentan los estudiantes en el aprendizaje de la geometría analítica: sección cónicas?
- ¿Cuáles son las dificultades que percibe la docente durante la enseñanza de la geometría analítica: sección cónicas?
- ¿Cuáles son las estrategias metodológicas apropiadas para la enseñanza de la geometría analítica: sección cónicas?
- ¿Cómo superar las dificultades que presentan los estudiantes en el aprendizaje de la geometría analítica: sección cónicas?

1.3 Justificación

Con el desarrollo del presente trabajo de investigación, se pretende dar equilibro entre los dominios geométricos y algebraicos dentro del estudio de la geometría analítica sección cónicas, para lo cual se debe enfocar el aprendizaje en el desarrollo de la lógica e ilustraciones, sin dejar de lado al conocimiento algebraico necesario para la resolución de problemas.

De ahí que, una correcta estrategia metodológica empleada en la enseñanza de las cónicas, permitirá que el docente aborde este tipo de contenidos de manera más efectiva, a través de actividades y situaciones didácticas, aportando en el desarrollo del pensamiento matemático en quienes lo estudian, traduciéndose en el desarrollo de habilidades y destrezas en el manejo de fórmulas, interpretación de gráficos y diagramas en cónicas, lo que favorecerá el aprendizaje y la comprensión profunda de los conceptos por parte de los estudiantes.

El promover nuevas estrategias metodológicas de enseñanza centrado en el aprendizaje activo de los estudiantes, promoverá el desarrollo de habilidades y competencias, al momento de enseñar y de aprender cónicas de manera efectiva fomentando significativamente el desarrollo de habilidades y competencias valiosas tanto en profesores como en estudiantes.

Por lo tanto, una correcta estrategia metodológica aplicada durante el proceso de enseñanza y de aprendizaje, ayudará también a motivar a los estudiantes y a fomentar su interés por el estudio de la geometría, lo que impactará positivamente en su rendimiento académico y en su futura formación profesional. En consecuencia, brindará una forma eficaz y práctica de enseñar, de aprender y de aplicar los conocimientos matemáticos en cónicas.

Además, es pertinente proponer estrategias metodológicas activas para la enseñanza y el aprendizaje de las cónicas, ya que son fundamentales en el estudio de la geometría analítica y en otras ciencias como lo son: óptica, mecánica celeste, ingeniería y más, puesto que permiten analizar las propiedades de las curvas en un sistema de coordenadas, reconocer los diferentes elementos de las cónicas, describir la forma de los espejos y las lentes, órbitas de los planetas alrededor del sol y de los satélites alrededor de los planetas.Por ende, es necesario que los estudiantes adquieran un conocimiento claro y profundo de las cónicas para que lleguen alcanzar un aprendizaje efectivo y práctico.

Fue factible realizar el trabajo de investigación porque se cuentó con bibliografía suficiente de la temática de estudio, así como también con los recursos y el tiempo necesario para llevar adelante la investigación.

Los beneficiarios directos de esta investigación serán los estudiantes que a posteriori cursen el 3er semestre en la carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales de la Matemática y la Física ya que el docente, al aplicar las estrategias metodológicas propuestas en esta investigación durante el proceso de enseñanza y de aprendizaje de la geometría analítica sección cónicas además, de reforzar y profundizar sus habilidades didácticas, facilitará en sus estudiantes la aplicación del estudio de las cónicas en variados contextos en forma consciente y dinámica.

1.4 Objetivos

1.4.1 General

Proponer estrategias metodológicas para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría analítica: sección cónicas para la docente y estudiantes de 3er semestre de la Carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales de la Matemática y la Física de la Facultad de Ciencias de la Educación, Humanas y Tecnologías de la Universidad Nacional de Chimborazo.

1.4.2 Específicos

- Diagnosticar las dificultades de aprendizaje que presentan los estudiantes en el estudio de la geometría analítica: sección cónicas.
- Identificar las dificultades que percibe la docente durante la enseñanza de la geometría analítica: sección cónicas.
- Fundamentar teóricamente las mejores estrategias metodológicas para la enseñanza y para el aprendizaje de la geometría analítica: sección cónicas.

- Sugerir estrategias metodológicas para mejorar la enseñanza y el aprendizaje de la geometría analítica: sección cónicas.

CAPÍTULO II
MARCO TEÓRICO

2.1 Estado del arte

La enseñanza de las secciones cónicas es importante por varias razones. En primer lugar, la geometría analítica es una herramienta importante para la resolución de problemas geométricos, ya que permite la representación gráfica de figuras mediante el uso de ecuaciones, en este sentido, las secciones cónicas son un conjunto de curvas que se obtienen como intersecciones de una superficie cónica con un plano, y su estudio permite conocer las propiedades y características de estas curvas, lo cual es esencial para resolver ciertos problemas geométricos. En segundo lugar, las secciones cónicas tienen aplicaciones en diversas áreas de la ciencia y la tecnología, como la óptica, la mecánica celeste, la ingeniería y la física, entre otras. Por lo tanto, el estudio de la geometría analítica y las secciones cónicas es fundamental para comprender y aplicar conceptos y métodos en estas áreas de conocimiento.

Una vez revisado distintas fuentes bibliográficas se identificaron las siguientes investigaciones relacionadas con el tema de investigación.

Obtenido del repositorio de la Universidad Nacional de Colombia, con el tema de investigación: “Objeto de aprendizaje para la enseñanza de las secciones cónicas incorporando los conceptos matemáticos, la teoría de representaciones y las aplicaciones”, presentado por (Murillo Quiñones, 2020). El trabajo contiene un componente de investigación de enfoque cuantitativo, alcance descriptivo y diseño pre-experimental. Enfocado en desarrollar un objeto de aprendizaje para la enseñanza de las secciones cónicas en el que se articulen los conceptos matemáticos, las distintas representaciones y sus aplicaciones. En sus resultados, se menciona, que los estudiantes lograron avanzar en su comprensión de los conceptos matemáticos y realizar de forma adecuada diferentes cambios de representaciones.

Garzón (2020) de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, presento el tema de investigación: “Situaciones didácticas para el aprendizaje de las cónicas desde el concepto de métrica”. Para llevar a cabo su didáctica, utilizó el marco teórico de la Teoría de las Situaciones Didácticas; en este aspecto, la investigación a analiza el aporte de las situaciones didácticas al aprendizaje que desarrollan los estudiantes en la comprensión del concepto de métrica en el estudio de las diferentes cónicas desde su definición como lugar geométrico. En sus resultados, se evidencia que el conocimiento de las cónicas emerge de “la resolución de problemas, construcciones geométricas, modelos y aplicaciones de la matemática al mundo real para evaluar conjeturas, análisis de posibilidades y generalización de conceptos” (Pérez, 2018, p. 271).

Con el tema de investigación: “Estrategia metodológica para la enseñanza de cónicas con material concreto”, presentado por Siavichay y Velásquez (2021), de la Universidad de Cuenca. Abordó una metodología mixta la misma que fue realizada desde un enfoque cuantitativo y cualitativo. Las técnicas que se utilizaron son la encuesta y la entrevista, mismas que fueron diseñadas de acuerdo a los objetivos planteados. Se plantearon los objetivos considerando desarrollar una estrategia metodológica con el uso de material concreto en el tema de cónicas para la comprensión y aplicación en el proceso de enseñanza. En sus resultados se destaca que implementación de una estrategia metodológica, complementada con material concreto previamente planificado, puede formar a los estudiantes no solo a nivel intelectual sino ayudar a su crecimiento personal desde la transversalidad y la interculturalidad.

2.2 Fundamento Teórico

2.2.1 Álgebra

"El algebra es la rama de la matemática en la que las operaciones aritméticas y manipulaciones formales se aplican a símbolos abstractos en lugar de a números específicos" (Corry, 2024). Es el lenguaje algebraico que expresa y resuelve problemas matemáticos en forma general.

2.2.2 Geometría

La geometría es una rama de las matemáticas que se dedica al estudio de las figuras en un plano o espacio, analizando sus características y medidas como el perímetro, área y volumen. Es una ciencia con muchas aplicaciones y sirve de base para otros campos de estudio como la física, la geografía, la arquitectura y la topografía (Fundación Ramón Areces, 2020).

Es una disciplina fundamental en la educación y en la comprensión de las propiedades espaciales de las figuras. "Su estudio permite desarrollar habilidades de visualización, razonamiento lógico y resolución de problemas" (Martínez, 2021).

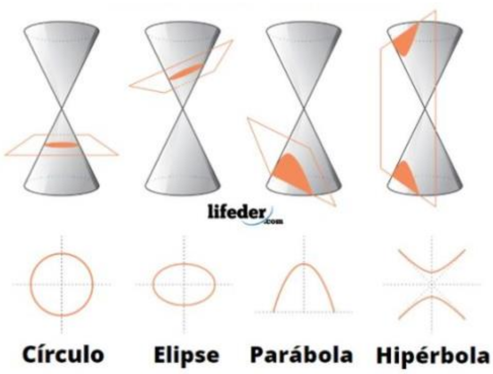
2.2.2.1 Geometría analítica

La geometría analítica es una rama de las matemáticas que combina conceptos geométricos con técnicas algebraicas. Esta poderosa" herramienta matemática, que permite representar figuras y resolver problemas mediante el uso de coordenadas y ecuaciones, ha tenido un largo y fascinante desarrollo a lo largo de la historia" (Fernández, 2020).

2.2.2.1.1 Cónica

Según Santa y Jaramillo (2011) se llama "cónica (o sección cónica) a las curvas resultantes de la intersección del cono y un plano. Este plano no debe pasar por el vértice (V)". Existen cuatro tipos de cónicas, según el ángulo del plano que interseca con el cono y su base.

Figura 1.
Tipos de Cónicas



Nota. Tomado de (Bolívar, 2020)

2.2.2.1.2 Ecuaciones de la cónicas

Ecuación Canónica

La ecuación canónica es una forma específica de una ecuación que se obtiene al transformar la ecuación general mediante una serie de operaciones algebraicas, con el objetivo de simplificar la ecuación o revelar propiedades especiales de la función que describe. En el caso de las ecuaciones cuadráticas, la forma canónica es la forma canónica de una parábola o forma estándar:

$$[a(x-h)^2 + k = 0]$$

donde $((h,k))$es el vértice de la parábola. La ecuación canónica de una parábola muestra claramente la ubicación de su vértice y facilita el análisis de sus propiedades geométricas. Para ecuaciones de mayor grado o diferentes tipos de ecuaciones, la forma canónica puede variar, pero el objetivo general es simplificar la ecuación para facilitar su resolución o interpretación.

Ecuación Ordinaria

La ecuación ordinaria, también conocida como forma ordinaria, es una forma de representar una ecuación en la cual todos los términos están agrupados en un lado de la ecuación y el otro lado es igual a cero. Esta forma se usa comúnmente para expresar la ecuación de una línea recta o una función en un formato que facilita el análisis y la resolución de problemas. Por ejemplo, para una ecuación de línea recta en el plano cartesiano, la forma ordinaria es:

$$[\ Ax + By + C = 0\ ]$$

donde (A), (B) y (C) son coeficientes constantes. Esta forma es útil porque simplifica el proceso de encontrar intersecciones, pendientes y otros atributos de la línea recta.

Ecuación General

La ecuación general es una forma estándar de representar una ecuación en álgebra, especialmente en el contexto de las ecuaciones polinomiales o las ecuaciones cuadráticas. En general, la ecuación general de un polinomio de grado (n) tiene la forma:

$$[a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0]$$

donde $(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0)$ son coeficientes que pueden ser números reales o complejos, y (x) es la variable. Por ejemplo, para una ecuación cuadrática, que es un polinomio de grado 2, la ecuación general es:

$$[ax^2 + bx + c = 0]$$

Aquí, (a, b), y (c) son coeficientes, y ($a \neq 0$). La ecuación general es útil porque proporciona una forma estándar para trabajar con ecuaciones de diferentes grados y facilita la aplicación de técnicas algebraicas y numéricas.

2.2.2.1.3 Secciones Cónicas

Las secciones cónicas representan una rama fascinante de la geometría que se concentra en el estudio de las curvas obtenidas al interceptar un cono con un plano. Estas curvas, que incluyen el círculo, la elipse, la parábola y la hipérbola, desempeñan un papel crucial en diversas áreas de la ciencia y la ingeniería. Las secciones cónicas son curvas que resultan de cortar un cono con un plano. Dependiendo de la orientación y la posición del plano en relación con el cono, se obtienen distintas formas geométricas. (García Pérez, 2022)

- Círculo: Cuando el plano corta el cono de manera perpendicular a su eje, se obtiene un círculo. Este caso particular revela una figura simétrica en la que todos los puntos de la curva están equidistantes del centro.
- Parábola: Cuando el plano es paralelo a un generatriz del cono, se produce una parábola. La parábola es reconocida por su propiedad reflexiva, donde todos los rayos paralelos reflejados desde su superficie cóncava convergen en un punto focal.
- Elipse: Si el plano corta el cono de manera oblicua, pero no de forma paralela al eje del cono, se forma una elipse. La elipse es conocida por tener dos ejes, mayor y menor, que definen sus propiedades geométricas.
- Hipérbola: Al cortar el cono de manera que el plano sea paralelo a ambos lados del vértice del cono, se obtiene una hipérbola. La hipérbola tiene dos ramas que se extienden hacia el infinito y comparte propiedades especiales, como su enfoque en puntos opuestos

2.2.2.1.4 Tipos de Secciones Cónicas

El estudio de las cónicas es esencial en geometría, y cada tipo de conicidad tiene propiedades matemáticas y geométricas distintivas (Lehmann, 2012). Es esencial explorar propiedades para desarrollar una comprensión integral de las cónicas y su aplicación en diversos contextos matemáticos y científicos (Kindle, 2019). A continuación, se presenta una visión detallada de los elementos, tratamiento formal y fórmulas asociadas con cada tipo de cónica:

CIRCUNFERENCIA

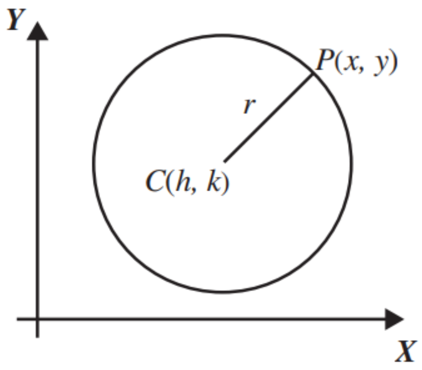
"La circunferenia es el lugar geométrico que describe un punto que se mueve en el plano de tal manera que su distancia a un punto fijo llamado centro, siempre es constante". (Pearson, 2009)

Matemáticamente se encuentra definida de la siguiente forma:

$$d_{cp} = r$$

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r$$

Figura 2.
Circunferencia

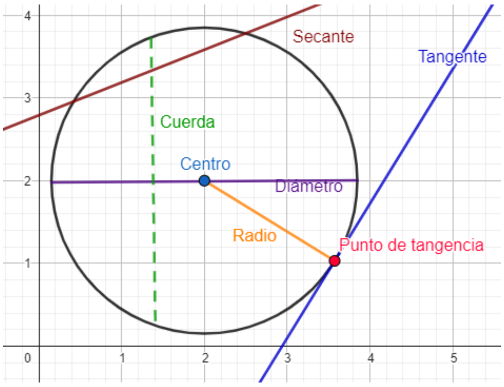


Nota. Tomado de (Pearson, 2009)

- Líneas y puntos notables

Figura 3.

Puntos y líneas notables en la circunferencia



Nota. Elaborado por Karina Vega

PUNTOS

- Centro (c): El punto equidistante de todos los puntos en la circunferencia.
- Punto de tangencia: El único punto donde una tangente toca la circunferencia.

LÍNEAS

- Radio(r): Segmento que une el centro con cualquier punto de la circunferencia.
- Diámetro (d): Segmento que pasa por el centro y conecta dos puntos opuestos en la circunferencia. Es el doble del radio.
- Cuerda: Segmento que une dos puntos de la circunferencia, sin necesidad de pasar por el centro.
- Secante: Línea que corta la circunferencia en dos puntos.
- Tangente: Línea que toca la circunferencia en un solo punto, sin cruzarla.

- **Características Geométricas**

- Centro y Radio: El centro define la posición central del círculo, y el radio determina la distancia desde el centro hasta cualquier punto de la circunferencia,
- Simetría: Es simétrico respecto a su centro, lo que implica que cualquier línea que pase por el centro divide al círculo en dos partes iguales.
- Uniformidad: Todos los puntos de la circunferencia están a la misma distancia del centro.
- Tangente a la Circunferencia: Una línea tangente a la circunferencia en un punto dado es perpendicular al radio que se extiende hasta ese punto.

- Secante: Línea que corta la circunferencia en dos puntos.
- Cuerda: Línea que conecta dos puntos en la circunferencia.

- **Deducción de las ecuaciones de la circunferencia**

Ecuación canónica

Consideremos un punto $P\ (x, y)$ que se encuentra en la circunferencia. La circunferencia se define como el conjunto de todos los puntos que están a una distancia constante (r) del centro, que en este caso es el origen $C(0{,}0)$.

Utilizando la definición matemática de la circunferencia

$$d_{cp} = r$$

$$\sqrt{(x_2 - h)^2 + (y - k)^2} = r$$

Reemplazando los datos obtenidos:

Punto: $P(x, y)$

Centro: $C(0{,}0)$

Se obtiene:

$$\sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2} = r$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = r$$

$$\boldsymbol{x^2 + y^2 = r^2}$$

Ecuación ordinaria

Consideremos un punto $P(x, y)$ que pertenece a la circunferencia. La circunferencia se define como el conjunto de todos los puntos que están a una distancia constante (r) del centro $C(h, k)$.

Utilizando la definición matemática de la circunferencia

$$d_{cp} = r$$

$$\sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2} = r$$

Reemplazando los datos obtenidos:

Punto $P(x, y)$

Centro $C(h, k)$

Se obtiene:

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r$$

$$\boldsymbol{(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2}$$

Ecuación general

La ecuación general de la circunferencia se obtiene al desarrollar su ecuación ordinaria mediante producto notable.

Partiendo de la ecuación ordinaria:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

Desarrollando los binomios al cuadrado:

$$x^2 - 2xh + h^2 + y^2 - 2yk + k^2 = r^2$$

Reagrupando los términos:

$$x^2 + y^2 - 2xh - 2yk + h^2 + k^2 - r^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2xh - 2yk + (h^2 + k^2 + r^2) = 0$$

Asignando nuevos nombres a los coeficientes:

$$\text{A} = 1\ (Coeficiente\ de\ x^2)$$

$$C = 1\ (coeficiente\ de\ y^2)$$

$$D = -2h\ (Coeficiente\ de\ x)$$

$$E = -2k\ (coeficiente\ de\ y)$$

$$F = h^2 + k^2 - r^2\ (término\ independiente)$$

Obtenemos la ecuación general de la circunferencia:

$$\boldsymbol{Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0}$$

En donde:

- D: Relacionado con la coordenada x del centro de la circunferencia.

$$D = 0 \rightarrow \; El\; centro\; de\; la\; circunferencia\; está\; en\; el\; eje\; y\; (h = 0)$$

- E: Relacionado con la coordenada y del centro de la circunferencia.

$$E = 0 \rightarrow \; El\; centro\; de\; la\; circunferencia\; está\; en\; el\; eje\; x\; (h = 0)$$

- F: Relacionado con el radio de la circunferencia y las coordenadas h y k de su centro.

$$F = 0 \rightarrow La\; circunferencia\; pasa\; por\; el\; origen\; (0{,}0)$$

Familia o haz de circunferencias

La familia de circunferencias se define como el conjunto de todas las circunferencias que pasan por un punto fijo y cumplen la siguiente condición:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = p^2$$

En donde p es un parámetro que toma diferentes valores, generando así una familia de circunferencias con el mismo centro en el origen.

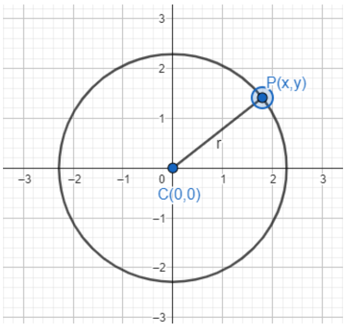
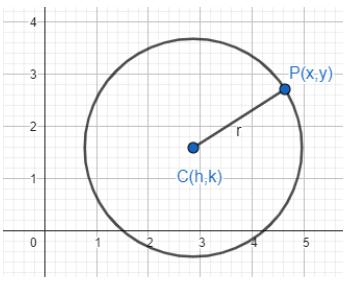
- **Tratamiento Formal**

Condiciones

- Si r es positivo la circunferencia es real.
- Si r es negativo la circunferencia es imaginaria.
- Si r es igual a cero entonces representa un punto

Tabla 1.

Tratamiento Formal Cónica: Circunferencia

Circunferencia	Ecuación	Elementos
Figura 4. *Circunferencia con C (0,0)*  *Nota.* Elaborado por Karina Vega	**Ecuación en su Forma Canónica:** $x^2 + y^2 = r^2$	Centro: $C\ (0{,}0)$ Radio: (r)
Figura 5. *Circunferencia con C (h, k)*  *Nota.* Elaborado por Karina Vega	**Ecuación en su Forma Ordinaria:** $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$	Centro: $C\ (h,k)$ Radio: r
Ecuación en su Forma General: $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ $(A = C)$		
Familia o haz de circunferencias $(x-h)^2 + (y-k)^2 = p^2$		

Nota. Extraído de (Pearson, 2009)

PARÁBOLA

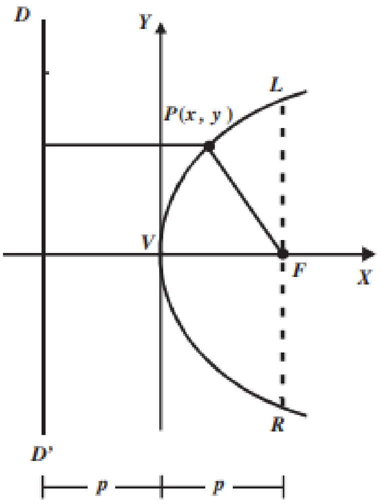
"La parábola es el lugar geométrico que describe un punto que se mueve en el plano de tal manera que equidistan de un punto fijo, llamado foco, y una recta fija, llamada directriz". (Pearson, 2009)

Matemáticamente se encuentra definida de la siguiente forma:

$$\overline{PF} = \overline{PD}$$

Figura 6.

Parábola

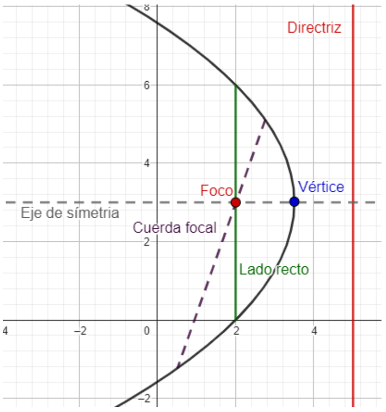


Nota. Tomado de (Pearson, 2009)

- Puntos y líneas notables

Figura 7.

Puntos y líneas notables en la parábola



Nota. Elaborado por Karina Vega

PUNTOS

- Vértice: Punto donde la parábola cambia de dirección, el más alto o bajo según la orientación.
- Foco: Punto dentro de la parábola; toda distancia desde cualquier punto de la parábola al foco es igual a la distancia a la directriz.

LÍNEAS

- Directriz: Línea fija opuesta al foco; se usa para definir la parábola.
- Eje de simetría: Línea que pasa por el vértice y el foco, dividiendo la parábola en dos partes iguales.
- Cuerda focal: Cuerda que pasa por el foco y es perpendicular al eje de simetría.
- Lado recto: Segmento de la cuerda focal que atraviesa el foco y es perpendicular al eje de simetría.

- **Características Geométricas**

- La parábola es simétrica con respecto a su eje de simetría. Los puntos equidistantes al foco y al vértice están en línea recta.
- La distancia del vértice al foco (p) es igual a la distancia del vértice a la recta directriz.
- La distancia focal "p" determina la "abertura" de la parábola. Si "p" es positivo, la parábola se abre hacia arriba; si "p" es negativo, se abre hacia abajo.
- La recta directriz es una línea recta que es perpendicular al eje de simetría y está a una distancia "p" del vértice.
- Puntos de intersección: La parábola puede interceptar el eje x en dos puntos, dependiendo de la posición relativa de la parábola con respecto al eje x.

- **Deducción de las ecuaciones de la parábola**

PARÁBOLA HORIZONTAL

Ecuación canónica

Sea una parábola con vértice en el origen, foco en el eje x $F(p, 0)$ donde p es el parámetro y su directriz $x = -p$. Se toma un punto $P(x, y)$ que cumpla con la condición de que la distancia al foco y a la directriz sea la misma, es decir:

$$\overline{PF} = \overline{PD}$$

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$\sqrt{(x - p)^2 + y^2} = \frac{1(x) + 0(y) + p}{\sqrt{(1)^2 + (0)^2}}$$

$$\sqrt{(x - p)^2 + y^2} = x + p$$

$$\left(\sqrt{(x - p)^2 + y^2}\right)^2 = (x + p)^2$$

$$(x - p)^2 + y^2 = x^2 + 2xp + p^2$$

$$x^2 - 2xp + p^2 + y^2 = x^2 + 2xp + p^2$$

$$-2xp + y^2 = 2xp$$

$$y^2 - 2xp - 2xp = 0$$

$$y^2 - 4xp = 0$$

$$\boldsymbol{y^2 = 4px}$$

En donde: p es la Distancia del vértice al foco

Ecuación ordinaria

Sea una parábola con vértice en fuera del origen (h, k), foco en el eje x $F(h + p, k)$ donde p es el parámetro y su directriz $x = h - p$. Se toma un punto $P(x, y)$ que cumpla con la condición de que la distancia al foco y a la directriz sea la misma, es decir:

$$\overline{PF} = \overline{PD}$$

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$\sqrt{(x - (h + p))^2 + (y - k)^2} = \frac{1(x) + 0(y) - h + p}{\sqrt{(1)^2 + (0)^2}}$$

$$\sqrt{(x - (h + p))^2 + (y - k)^2} = x - h + p$$

$$\left(\sqrt{(x - (h + p))^2 + (y - k)^2}\right)^2 = (x - h + p)^2$$

$$(x - h - p)^2 + (y - k)^2 = x^2 - 2hx + h^2 + 2xp + p^2 - 2hp$$

$$-2xp + 2hp + y^2 - 2yk + k^2 = +2xp - 2hp$$

$$y^2 - 2yk + k^2 = 2xp - 2hp + 2xp - 2hp$$

$$y^2 - 2yk + k^2 = 4xp - 4hp$$

$$\boldsymbol{(y - k)^2 = 4p(x - h)}$$

En donde: p es la distancia del vértice al foco

Ecuación general

La ecuación general de la parábola horizontal se obtiene al desarrollar su ecuación ordinaria mediante producto notable.

Partiendo de la ecuación ordinaria:

$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$

Desarrollando los binomios al cuadrado:

$$y^2 - 2ky + k^2 = 4px - 4ph$$

Reagrupando los términos:

$$y^2 - 2ky + k^2 - 4px + 4ph = 0$$

$$y^2 - 4px - 2ky + k^2 + 4ph = 0$$

Asignando nuevos nombres a los coeficientes:

$$C = 1\ (coeficiente\ de\ y^2)$$

$$D = -4p\ (coeficiente\ de\ x)$$

$$E = -2k\ (coeficiente\ de\ y)$$

$$F = k^2 + 4ph\ (término\ independiente)$$

Obtenemos la ecuación general de la circunferencia:

$$\boldsymbol{Cy^2 + Dx + Ey + F = 0}$$

En donde:

- C: Determina la curvatura de la parábola

$$+C \rightarrow La\ parábola\ se\ abre\ a\ la\ derecha$$
$$-C \rightarrow La\ parábola\ se\ abre\ a\ la\ izquierda$$

- D: Cambia el punto, en donde la parábola corta en el eje x.
- E: Cambia el punto, en donde la parábola corta al eje y.
- F: Término constante que afecta la posición de la parábola con respecto al origen.

Ecuación de una parábola con vértice en el origen $(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0})$ y una recta tangente en el punto $(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0})$:

Para encontrar la ecuación de una parábola con vértice en el origen (0,0) y una recta tangente en el punto (x_0, y_0), se debe encontrar la ecuación de la parábola con un punto específico (x_0, y_0) y la ecuación de la recta tangente a la parábola en el punto (x_0, y_0).

Ecuación canónica de la parábola horizontal

$$y^2 = 4px$$

Para encontrar la ecuación de la parábola que pasa por un punto específico (x_0, y_0), se debe sustituir estas coordenadas en la ecuación canónica de la parábola. Esto permitirá determinar el valor de p

$$y_0^2 = 4px_0$$

$$\frac{y_0^2}{4x_0} = p$$

Sustituyendo este valor de p en la ecuación canónica, se obtiene la ecuación de la parábola que pasa por el punto dado

$$y^2 = 4px$$

$$y^2 = 4\left(\frac{y_0^2}{4x_0}\right)x$$

$$y^2 = \frac{y_0^2}{x_0}x$$

Para encontrar la ecuación de la recta tangente a la parábola en el punto (x_0, y_0), se utiliza la derivada de la ecuación canónica de la parábola horizontal con respecto a x.

$$\frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(4px)$$

$$2y\frac{dy}{dx} = 4p$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4p}{2y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2p}{y}$$

Al sustituir el punto (x_0, y_0) en la derivada se obtiene la pendiente de la recta tangente

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2p}{y_0}$$

La ecuación de la recta tangente en un punto (x_0, y_0) se puede expresar usando la forma punto-pendiente:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$m: pendiente\ de\ la\ recta\ tangente$$

Reemplazar $m,\ p$ en la ecuación punto-pendiente

$$y - y_0 = \frac{2p}{y_0}(x - x_0)$$

$$y - y_0 = \frac{2\left(\frac{y_0^2}{4x_0}\right)}{y_0}(x - x_0)$$

$$\boldsymbol{y - y_0 = \frac{y_0}{2x_0}(x - x_0)}$$

Ecuación de una parábola con vértice $(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{k})$ y una recta tangente en el punto $(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0})$

Para encontrar la ecuación de una parábola con vértice en (h, k) y una recta tangente en el punto (x_0, y_0), se debe encontrar la ecuación de la parábola con un punto específico (x_0, y_0) y la ecuación de la recta tangente a la parábola en el punto (x_0, y_0).

Ecuación ordinaria de la parábola horizontal

$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

Para encontrar la ecuación de la parábola que pasa por un punto específico (x_0, y_0), se debe sustituir estas coordenadas en la ecuación ordinaria de la parábola. Esto permitirá determinar el valor de p

$$(y_0 - k)^2 = 4p(x_0 - h)$$
$$p = \frac{(y_0 - k)^2}{4(x_0 - h)}$$

Sustituyendo este valor de p en la ecuación ordinaria, se obtiene la ecuación de la parábola que pasa por el punto dado

$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$
$$(y - k)^2 = 4\left(\frac{(y_0 - k)^2}{4(x_0 - h)}\right)(x - h)$$
$$(y - k)^2 = \frac{(y_0 - k)^2}{(x_0 - h)}(x - h)$$

Para encontrar la ecuación de la recta tangente a la parábola en el punto (x_0, y_0), se utiliza la derivada de la ecuación canónica de la parábola horizontal con respecto a x.

$$\frac{d}{dx}((y-k)^2) = \frac{d}{dx}(4p(x-h))$$

$$\frac{d}{dx}((y-k)^2) = \frac{d}{dx}(4px-4ph)$$

$$2\,(y-k)\frac{dy}{dx} = 4p$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4p}{2\,(y-k)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2p}{y-k}$$

Al sustituir el punto (x_0, y_0) en la derivada se obtiene la pendiente de la recta tangente

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2p}{y_0-k}$$

La ecuación de la recta tangente en un punto (x_0, y_0) se puede expresar usando la forma punto-pendiente:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$m\!: pendiente\ de\ la\ recta\ tangente$$

Reemplazar $m,\ p$ en la ecuación punto-pendiente

$$y - y_0 = \frac{2p}{y_0-k}(x-x_0)$$

$$y - y_0 = \frac{2\left(\frac{(y_0-k)^2}{4(x_0-h)}\right)}{y_0-k}(x-x_0)$$

$$\boldsymbol{y - y_0 = \frac{y_0-k}{2(x_0-h)}(x-x_0)}$$

PARÁBOLA VERTICAL

Ecuación canónica

Sea una parábola con vértice en el origen, foco en el eje y $F(0, p)$ donde p es el parámetro y su directriz $y = -p$. Se toma un punto $P(x, y)$ que cumpla con la condición de que la distancia al foco y a la directriz sea la misma, es decir:

$$\overline{PF} = \overline{PD}$$

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$\sqrt{x^2 + (y - p)^2} = \frac{0(x) + 1(y) + p}{\sqrt{(0)^2 + (1)^2}}$$

$$\sqrt{x^2 + (y - p)^2} = y + p$$

$$\left(\sqrt{x^2 + (y - p)^2}\right)^2 = (y + p)^2$$

$$x^2 + (y - p)^2 = y^2 + 2yp + p^2$$

$$x^2 + y^2 - 2yp + p^2 = y^2 + 2yp + p^2$$

$$-2yp + x^2 = 2yp$$

$$x^2 - 2yp - 2yp = 0$$

$$x^2 - 4yp = 0$$

$$\boldsymbol{x^2 = 4yp}$$

En donde: p es la distancia del vértice al foco

Ecuación ordinaria

Sea una parábola con vértice en fuera del origen (h, k), foco en el eje x $F(h, k + p)$ donde p es el parámetro y su directriz $y = k - p$. Se toma un punto $P(x, y)$ que cumpla con la condición de que la distancia al foco y a la directriz sea la misma, es decir:

$$\overline{PF} = \overline{PD}$$

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$\sqrt{(x - h)^2 + (y - (k + p))^2} = \frac{0(x) + 1(y) - k + p}{\sqrt{(0)^2 + (1)^2}}$$

$$\sqrt{(x - h)^2 + (y - (k + p))^2} = y - k + p$$

$$\left(\sqrt{(x - h)^2 + (y - (k + p))^2}\right)^2 = (y - k + p)^2$$

$$(x - h)^2 + (y - k - p)^2 = y^2 + k^2 + p^2 - 2ky + 2py - 2kp$$

$$x^2 - 2xh + h^2 - 2yk + 2kp - 2py = -2ky - 2kp + 2py$$

$$x^2 - 2xh + h^2 = -2kp - 2kp + 2py + 2py$$

$$x^2 - 2xh + h^2 = 4py - 4kp$$

$$(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{h})^{2}=\boldsymbol{4p}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{k})$$

En donde: P es la distancia del vértice al foco

Ecuación general

La ecuación general de la parábola vertical se obtiene al desarrollar su ecuación ordinaria mediante producto notable.

Partiendo de la ecuación ordinaria:

$$(x-h)^{2}=4p(y-k)$$

Desarrollando los binomios al cuadrado:

$$x^{2}-2hx+h^{2}=4py-4pk$$

Reagrupando los términos:

$$x^{2}-2hx+h^{2}-4py+4pk=0$$

$$x^{2}-2hx-4py+h^{2}+4pk=0$$

Asignando nuevos nombres a los coeficientes:

$$A=1\ (coeficiente\ de\ x^{2})$$

$$D=\ -2\text{h}\ (coeficiente\ de\ x)$$

$$E=\ -4\text{p}\ (coeficiente\ de\ y)$$

$$F=h^{2}+4pk\ (término\ independiente)$$

Obtenemos la ecuación general de la circunferencia:

$$\boldsymbol{Ax^{2}}+\boldsymbol{Dx}+\boldsymbol{Ey}+\boldsymbol{F}=\boldsymbol{0}$$

En donde:

- A: Determina la curvatura de la parábola

$$+A\rightarrow La\ parábola\ se\ abre\ hacia\ arriba$$
$$-A\rightarrow La\ parábola\ se\ abre\ hacia\ abajo$$

- D: Cambia el punto, en donde la parábola corta en el eje x.
- E: Cambia el punto, en donde la parábola corta al eje y.
- F: Término constante que afecta la posición de la parábola con respecto al origen.

Ecuación de una parábola con vértice en el origen $(\mathbf{0},\mathbf{0})$ y una recta tangente en el punto $(\boldsymbol{x_0},\boldsymbol{y_0})$:

Para encontrar la ecuación de una parábola con vértice en el origen (0,0) y una recta tangente en el punto (x_0, y_0), se debe encontrar la ecuación de la parábola con un punto específico (x_0, y_0) y la ecuación de la recta tangente a la parábola en el punto (x_0, y_0).

Ecuación canónica de la parábola horizontal

$$x^2 = 4py$$

Para encontrar la ecuación de la parábola que pasa por un punto específico (x_0, y_0), se debe sustituir estas coordenadas en la ecuación canónica de la parábola. Esto permitirá determinar el valor de p

$$x_0^2 = 4py_0$$

$$\frac{x_0^2}{4y_0} = p$$

Sustituyendo este valor de p en la ecuación canónica, se obtiene la ecuación de la parábola que pasa por el punto dado

$$x^2 = 4py$$

$$x^2 = 4\left(\frac{x_0^2}{4y_0}\right)y$$

$$x^2 = \frac{x_0^2}{y_0}y$$

Para encontrar la ecuación de la recta tangente a la parábola en el punto (x_0, y_0), se utiliza la derivada de la ecuación canónica de la parábola horizontal con respecto a y.

$$\frac{d}{dy}(x^2) = \frac{d}{dy}(4py)$$

$$2x\frac{dx}{dy} = 4p$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{4p}{2x}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2p}{x}$$

Al sustituir el punto (x_0, y_0) en la derivada e invirtiendo $\frac{dx}{dy}$, se obtiene la pendiente de la recta tangente

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2p}{x_0}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x_0}{2p}$$

La ecuación de la recta tangente en un punto (x_0, y_0) se puede expresar usando la forma punto-pendiente:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$m\text{: } pendiente\ de\ la\ recta\ tangente$$

Reemplazar $m,\ p$ en la ecuación punto-pendiente

$$y - y_0 = \frac{x_0}{2p}(x - x_0)$$

$$y - y_0 = \frac{x_0}{2\left(\frac{x_0^2}{4y_0}\right)}(x - x_0)$$

$$\boldsymbol{y - y_0 = \frac{2y_0}{x_0}(x - x_0)}$$

Ecuación de una parábola con vértice $(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{k})$ y una recta tangente en el punto $(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0})$:

Para encontrar la ecuación de una parábola con vértice en (h, k) y una recta tangente en el punto (x_0, y_0), se debe encontrar la ecuación de la parábola con un punto específico (x_0, y_0) y la ecuación de la recta tangente a la parábola en el punto (x_0, y_0).

Ecuación ordinaria de la parábola vertical

$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

Para encontrar la ecuación de la parábola que pasa por un punto específico (x_0, y_0), se debe sustituir estas coordenadas en la ecuación ordinaria de la parábola. Esto permitirá determinar el valor de p

$$(x_0 - h)^2 = 4p(y_0 - k)$$

$$p = \frac{(x_0 - h)^2}{4(y_0 - k\ )}$$

Sustituyendo este valor de p en la ecuación ordinaria, se obtiene la ecuación de la parábola que pasa por el punto dado

$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

$$(x-h)^2 = 4\left(\frac{(x_0-h)^2}{4(y_0-k\ )}\right)(y-k)$$

$$(x-h)^2 = \frac{(x_0-h)^2}{(y_0-k\ )}(y-k)$$

Para encontrar la ecuación de la recta tangente a la parábola en el punto (x_0, y_0), se utiliza la derivada de la ecuación canónica de la parábola horizontal con respecto a y.

$$\frac{d}{dy}\ (x-h)^2 = \frac{d}{dy}(4p(y-k))$$

$$\frac{d}{dy}\ (x-h)^2 = \frac{d}{dy}(4py-4pk)$$

$$2(x-h)\frac{dx}{dy} = 4p$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{4p}{2(x-h)}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2p}{x-h}$$

Al sustituir el punto (x_0, y_0) en la derivada e invirtiendo $\frac{dx}{dy}$, se obtiene la pendiente de la recta tangente

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2p}{x_0-h}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x_0-h}{2p}$$

La ecuación de la recta tangente en un punto (x_0, y_0) se puede expresar usando la forma punto-pendiente:

$$y-y_0 = m(x-x_0)$$

$$m: pendiente\ de\ la\ recta\ tangente$$

Reemplazar m, p en la ecuación punto-pendiente

$$y-y_0 = \frac{x_0-h}{2p}(x-x_0)$$

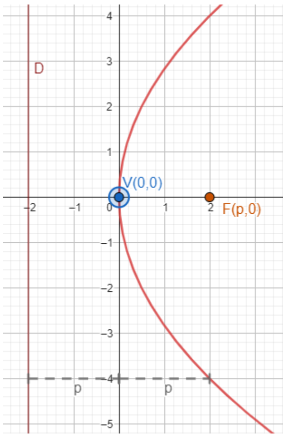
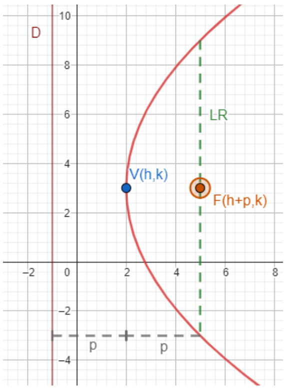
$$y-y_0 = \frac{x_0-h}{2\left(\frac{(x_0-h)^2}{4(y_0-k\ )}\right)}(x-x_0)$$

$$\boldsymbol{y - y_o = \frac{2(y_0 - k)}{x_0 - h}(x - x_0)}$$

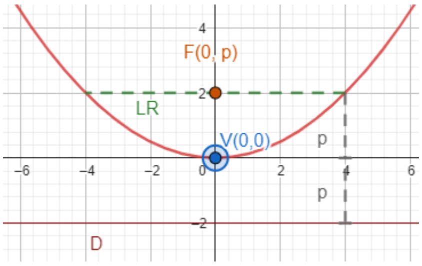
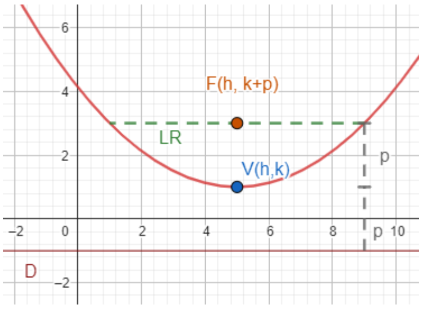
- **Tratamiento Formal**

Tabla 2.

Tratamiento Formal Cónica: Parábola

Parábola Horizontal	**Ecuación**	**Elementos**
Figura 8. *Parábola Horizontal con V (0,0)*  *Nota.* Elaborado por Karina Vega	**Ecuación canónica** $y^2 = 4px$ **Concavidad** Si $p > 0$ entonces la parábola abre hacia la derecha. Si $p < 0$ entonces la parábola abre hacia la izquierda.	$V(0,0)$ $F(p,0)$ $(\overline{DD'}): x = -p$ $y = 0$ $\overline{LR} = \lvert 4p \rvert$
Figura 9. *Parábola Horizontal con V (h, k)*  *Nota.* Elaborado por Karina Vega	**Ecuación ordinaria** $(y - k)^2 = 4p(x - h)$ **Concavidad** Si $p > 0$ entonces la parábola es cóncava a la derecha. Si $p < 0$ entonces la parábola es cóncava a la izquierda	$V(h,k)$ $F(h + p, k)$ $(\overline{DD'}): x = h - p$ $y = k$ $\overline{LR} = \lvert 4p \rvert$
Ecuación general: $Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$		
Ecuación de una parábola con vértice en el origen $(\boldsymbol{0,0})$ y una recta tangente en el punto $(\boldsymbol{x_0, y_0})$	$y - y_o = \frac{y_0}{2x_0}(x - x_0)$	

Ecuación de una parábola con vértice (h, k) y una recta tangente en el punto (x_0, y_0) $$y - y_o = \frac{y_0 - k}{2(x_0 - h)}(x - x_0)$$

Parábola Vertical	Ecuación	Elementos
Figura 10. *Parábola Vertical con V (0,0)*  *Nota.* Elaborado por Karina Vega	**Ecuación canónica** $x^2 = 4py$ **Concavidad** Si $p > 0$ entonces la parábola es cóncava hacia arriba. Si $p < 0$ entonces la parábola cóncava hacia abajo.	$V(0,0)$ $F(0, p)$ $(\overline{DD'}): y = -p$ $x = 0$ $\overline{LR} = \lvert 4p \rvert$
Figura 11. *Parábola Vertical con V (h, k)*  *Nota.* Elaborado por Karina Vega	**Ecuación ordinaria** $(x - h)^2 = 4p(y - k)$ **Concavidad** Si $p > 0$ entonces la parábola es cóncava hacia arriba. Si $p < 0$ entonces la parábola es cóncava hacia abajo.	$V(h, k)$ $F(h, k + p)$ $(\overline{DD'}): y = k - p$ $x = h$ $\overline{LR} = \lvert 4p \rvert$

Ecuación general: $Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$

Ecuación de una parábola con vértice en el origen $(0, 0)$ y una recta tangente en el punto (x_0, y_0): $$y - y_o = \frac{2y_0}{x_0}(x - x_0)$$

Ecuación de una parábola con vértice (h, k) y una recta tangente en el punto (x_0, y_0) $$y - y_o = \frac{2(y_0 - k)}{x_0 - h}(x - x_0)$$

Nota. Extraído de (Pearson, 2009)

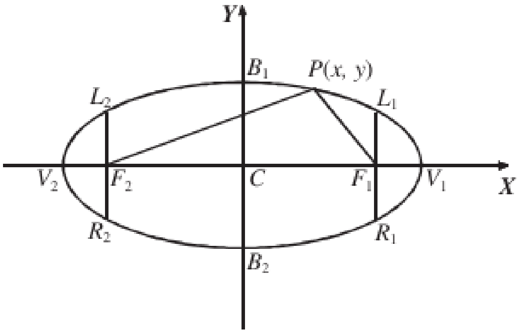
ELIPSE

"La elipse es el lugar geométrico que describe un punto del plano que se mueve de tal manera que la suma de sus distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es constante". (Pearson, 2009)

Matemáticamente se encuentra definida de la siguiente forma:

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$$

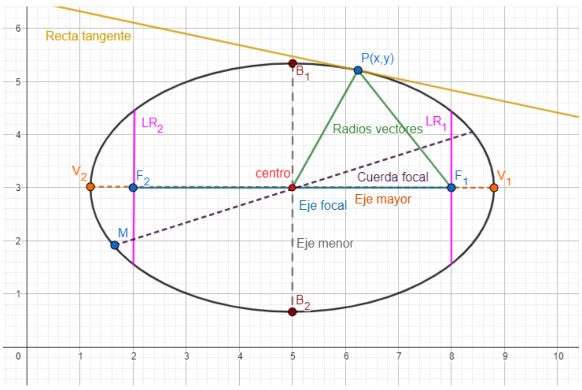
Figura 12.
Elipse



Nota. Tomado de (Pearson, 2009)

- Puntos y líneas notables

Figura 13.
Puntos y líneas notables en la elipse



Nota. Elaborado por Karina Vega

PUNTOS

- Centro (c): Punto medio de la elipse y también el punto donde se cruzan los ejes mayor y menor. Es el punto equidistante de los vértices, focos, y extremos del eje menor. (Delgadillo, 2017)
- Vértices (V_1, V_2): Puntos donde la elipse corta su eje mayor. Son los puntos más distantes entre sí a lo largo del eje mayor.
- Focos (F_1, F_2): Puntos fijos en el eje mayor de la elipse tales que la suma de las distancias desde cualquier punto de la elipse a ambos focos es constante.
- Extremos del Eje Menor; co-vértices (B_1, B_2): Puntos donde la elipse corta el eje menor. Estos puntos son los más distantes entre sí a lo largo del eje menor.

LÍNEAS

- Eje Mayor (V_1, V_2): Línea que une los dos vértices de la elipse y es el segmento más largo de la elipse.
- Eje Focal (F_1, F_2): Línea que une los dos focos de la elipse. Es colineal con el eje mayo. Su longitud es la misma que el eje mayor, ($2a$).
- Eje Menor (B_1, B_2): Línea que une los dos extremos del eje menor de la elipse. Su longitud es ($2b$) y es perpendicular al eje mayor en el centro de la elipse.
- Lado Recto (LR): Segmento de línea que pasa por los focos y es perpendicular al eje mayor. En coordenadas estándar, el lado recto se encuentra perpendicular al eje mayor, pasando por los focos.
- Radio vector: Segmentos que van desde un punto de la elipse hasta cada uno de los focos.
- Cuerdas: Segmentos que unen dos puntos cualesquiera de la elipse, sin pasar por el centro.
- Cuerda focal: Cualquier cuerda que pasa por uno de los focos.
- Recta tangente: Línea recta que toca la elipse en un solo punto.
- Excentricidad (e): Mide la "elongación" de la elipse. Es la relación entre la distancia del centro a uno de los focos y la distancia del centro a uno de los vértices.

- **Características Geométricas**

- La elipse es simétrica con respecto a sus ejes mayor y menor. Los puntos equidistantes a los dos focos están en línea recta.
- El eje mayor (2a) es la longitud máxima de la elipse, y el eje menor (2b) es la longitud máxima perpendicular al eje mayor.
- La excentricidad de la elipse, representada por (e), es una medida de su aplanamiento, siempre es menor a 1, y si es igual a 0, la elipse se convierte en una circunferencia.
- Si los ejes mayor y menor tienen la misma longitud, la elipse se convierte en un círculo.

- **Deducción de las ecuaciones de la elipse**

ELIPSE HORIZONTAL

Ecuación canónica

Sea $P(x, y)$ un punto de la elipse, por definición $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$, recordando la fórmula de la distancia entre dos puntos $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, al encontrar la distancia desde el punto P a cada de los puntos fijos $F_1(c, 0), f_2(-c, 0)$se obtiene:

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} = 2a$$
$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$
$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$
$$\left(\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2 = \left(2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2$$
$$(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2$$
$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2cx + c^2 + y^2$$
$$-2cx = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + 2cx$$
$$-2cx - 2cx - 4a^2 = -4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$
$$(\div(-4)) - 4cx - 4a^2 = -4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\ (\div -(4))$$
$$cx + a^2 = a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$
$$(cx + a^2)^2 = \left(a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2$$
$$c^2x^2 + 2a^2cx + a^4 = a^2(x^2 + 2cx + c^2 + y^2)$$
$$c^2x^2 + 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 + 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2$$
$$c^2x^2 + a^4 = a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2$$

$$a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$$
$$\left(\div a^2(a^2 - c^2)\right)x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)\left(\div a^2(a^2 - c^2)\right)$$
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

Si: $a^2 = b^2 + c^2$, entonces $b^2 = a^2 - c^2$

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Ecuación ordinaria

Es importante recordar la ecuación de la elipse horizontal con centro en el origen

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Para una elipse horizontal con centro fuera del origen en el punto (h,k), se hace una traslación de los ejes XY al punto $C(h,k)$.

Para trasladar el centro de la elipse al punto(h,k), se realiza un cambio de coordenadas. En lugar de usar las variables $x\ e\ y$ directamente, ahora se expresa la distancia desde el nuevo centro de la elipse. Esto se hace sustituyendo $x\ e\ y$ por $x-h\ e\ y-k$, respectivamente:

$$x' = x - h$$

$$y' = y - k$$

En donde (x', y') son las nuevas coordenadas con respecto al centro de la elipse en $C(h,k)$:

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1$$

Al sustituir $x',\ y'$, se obtiene la ecuación ordinaria de la elipse horizontal con centro en (h, k)

$$\boldsymbol{\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1}$$

Ecuación general

La ecuación general de la elipse horizontal se obtiene al desarrollar su ecuación ordinaria

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$
$$\frac{x^2-2xh+h^2}{a^2}+\frac{y^2-2yk+k^2}{b^2}=1$$
$$(a^2)(b^2)\ \frac{x^2-2xh+h^2}{a^2}+\frac{y^2-2yk+k^2}{b^2}=1\ (a^2)(b^2)$$
$$b^2(x^2-2xh+h^2)+a^2(y^2-2yk+k^2)=a^2b^2$$
$$b^2x^2-2b^2xh+b^2h^2+a^2y^2-2a^2yk+a^2k^2=a^2b^2$$
$$b^2x^2+a^2y^2-2b^2xh-2a^2yk+b^2h^2+a^2k^2-a^2b^2=0$$
$$b^2x^2+a^2y^2-2b^2xh-2a^2yk+(b^2h^2+a^2k^2-a^2b^2)=0$$

Asignando nuevos nombres a los coeficientes:

$$A=\mathrm{b}^2\ (coeficiente\ de\ x^2)$$

$$B=a^2(coeficiente\ de\ y^2)$$

$$D = -2\mathrm{b}^2\mathrm{h}\ (coeficiente\ de\ x)$$

$$E = -2\mathrm{a}^2\mathrm{k}\ (coeficiente\ de\ y)$$

$$F = b^2h^2 + a^2k^2 - a^2b^2\ (término\ constante)$$

Obtenemos la ecuación general de la elipse horizontal:

$$\boldsymbol{Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0}$$

En donde:

- A y B: Determinan la forma y la orientación de la elipse. En este caso, $A = b^2\ y\ B = a^2$, lo que indica que el eje mayor está alineado con el eje x (elipse horizontal).
- D y E: Están relacionados con la traslación del centro de la elipse desde el origen a (h, k). Específicamente, $D = -2b^2h$ y $E = -2a^2k$.
- F: Término independiente, que depende de las coordenadas del centro (h, k) y las longitudes de los semiejes a y b.

Ecuación de la elipse que pasa por cuatro puntos

Para encontrar la ecuación se sustituyen los puntos dados en la ecuación general y así se obtiene un sistema de ecuaciones con cuatro incógnitas, la solución del sistema determina los coeficientes de la ecuación.

Ecuación de una elipse con centro en el origen $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ y una recta tangente en el punto $(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0})$:

Para encontrar la ecuación de una elipse con centro en el origen (0,0) y una recta tangente en el punto (x_0, y_0), se debe derivar su ecuación canónica con respecto a x

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) = \frac{d}{dx}(1)$$

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2}\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{a^2}\left(\frac{b^2}{2y}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y}$$

Al sustituir el punto (x_0, y_0) en la derivada, se obtiene la pendiente de la recta tangente

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}$$

La ecuación de la recta tangente en un punto (x_0, y_0) se puede expresar usando la forma punto-pendiente:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$m: pendiente\ de\ la\ recta\ tangente$$

Reemplazar m en la ecuación punto-pendiente

$$y - y_0 = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}(x - x_0)$$

$$y - y_0 = -\frac{b^2 x_0 x}{a^2 y_0} + \frac{b^2 x_0^2}{a^2 y_0}$$

$$y - y_0 + \frac{b^2 x_0 x}{a^2 y_0} - \frac{b^2 x_0^2}{a^2 y_0} = 0$$

$$(a^2 y_0)\ \ y - y_0 + \frac{b^2 x_0 x}{a^2 y_0} - \frac{b^2 x_0^2}{a^2 y_0} = 0\ \ (a^2 y_0)$$

$$a^2 y_0 y - a^2 y_0^2 + b^2 x_0 x - b^2 x_0^2 = 0$$

$$a^2 y_0 y + b^2 x_0 x = a^2 y_0^2 + b^2 x_0^2$$

Se conoce que el punto (x_0, y_0) satisface la ecuación canónica de la elipse horizontal

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$$

$$b^2 x_0^2 + \mathrm{a}^2 y_0^2 = a^2 b^2$$

Al sustituir:

$$b^2 x_0^2 + \mathrm{a}^2 y_0^2 = a^2 b^2$$

En

$$a^2 y_0 y + b^2 x_0 x = a^2 y_0^2 + b^2 x_0^2$$

Se obtiene:

$$a^2 y_0 y + b^2 x_0 x = a^2 b^2$$

$$\left(\frac{1}{a^2\, b^2}\right) a^2 y_0 y + b^2 x_0 x = a^2 b^2 \left(\frac{1}{a^2\, b^2}\right)$$

$$\frac{y_0 y}{b^2} + \frac{x_0 x}{a^2} = 1$$

$$\boldsymbol{\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1}$$

Ecuación de una elipse con centro en $(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{k})$ y una recta tangente en el punto $(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0})$:

Para encontrar la ecuación de una elipse con centro en (h, k) y una recta tangente en el punto (x_0, y_0), se debe derivar su ecuación ordinaria con respecto a x

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2}\right] = \frac{d}{dx}(1)$$

$$\frac{2(x-h)}{a^2} + \frac{2(y-k)}{b^2}\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2(x-h)}{a^2}\left(\frac{b^2}{2(y-k)}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2}{a^2}\,\frac{(x-h)}{(y-k)}$$

Al sustituir el punto (x_0, y_0) en la derivada, se obtiene la pendiente de la recta tangente

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2(x_0 - h)}{a^2(y_0 - k)}$$

La ecuación de la recta tangente en un punto (x_0, y_0) se puede expresar usando la forma punto-pendiente:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$m\text{: } pendiente\ de\ la\ recta\ tangente$$

Reemplazar m en la ecuación punto-pendiente

$$y - y_0 = -\frac{b^2}{a^2}\,\frac{(x_0 - h)}{(y_0 - k)}(x - x_0)$$

$$a^2(y - y_0)(y_0 - k) = -b^2(x_0 - h)(x - x_0)$$

$$\left(\frac{1}{a^2b^2}\right)\ [a^2(y-y_0)(y_0-k)+b^2(x_0-h)(x-x_0)]=0\ \ \left(\frac{1}{a^2b^2}\right)$$
$$\frac{(x_0-h)(x-x_0)}{a^2}+\frac{(y-y_0)(y_0-k)}{b^2}=0$$

Se conoce que el punto (x_0, y_0) satisface la ecuación ordinaria de la elipse horizontal

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$
$$\frac{(x_0-h)^2}{a^2}+\frac{(y_0-k)^2}{b^2}=1$$

En la geometría analítica, hay un resultado conocido que permite encontrar la ecuación de la tangente de manera directa. Este método consiste en reemplazar los términos cuadráticos de la ecuación de la cónica por productos lineales para el punto de tangencia.

Dado que queremos la tangente en el punto (x_0, y_0) se reemplaza los términos cuadráticos de la ecuación de la elipse

$$(x_0-h)^2\ se\ reemplaza\ por\ (x_0-h)(x-x_0)$$

$$(y_0-k)^2\ se\ reemplaza\ por\ (y-y_0)(y_0-k)$$

Llevando a la ecuación de una elipse con centro en (h, k) y una recta tangente en el punto (x_0, y_0)

$$\boldsymbol{\frac{(x_0-h)(x-x_0)}{a^2}+\frac{(y-y_0)(y_0-k)}{b^2}=1}$$

ELIPSE HORIZONTAL

Ecuación canónica

Sea $P(x,y)$ un punto de la elipse, por definición $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$, recordando la fórmula de la distancia entre dos puntos $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, al encontrar la distancia desde el punto P a cada de los puntos fijos $F_1(0,c), f_2(0,-c)$se obtiene:

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x)^2 + (y-c)^2} + \sqrt{(x)^2 + (y+c)^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x)^2 + (y-c)^2} = 2a - \sqrt{(x)^2 + (y+c)^2}$$

$$\left(\sqrt{(x)^2 + (y-c)^2}\right)^2 = \left(2a - \sqrt{(x)^2 + (y+c)^2}\right)^2$$

$$x^2 + (y-c)^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x)^2 + (y+c)^2} + (x)^2 + (y+c)^2$$

$$x^2 + y^2 - 2cy + c^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x)^2 + (y+c)^2} + x^2 + y^2 + 2cy + c^2$$

$$-2cy = 4a^2 - 4a\sqrt{(x)^2 + (y+c)^2} + 2cy$$

$$-2cy - 2cy - 4a^2 = -4a\sqrt{(x)^2 + (y+c)^2}$$

$$(\div(-4)) - 4cy - 4a^2 = -4a\sqrt{(x)^2 + (y+c)^2}\ (\div(-4))$$

$$cy + a^2 = a\sqrt{(x)^2 + (y+c)^2}$$

$$(cy + a^2)^2 = \left(a\sqrt{(x)^2 + (y+c)^2}\right)^2$$

$$c^2y^2 + 2a^2cy + a^4 = a^2(x^2 + y^2 + 2cy + c^2)$$

$$c^2y^2 + 2a^2cy + a^4 = a^2x^2 + a^2y^2 + 2a^2cy + a^2c^2$$

$$c^2y^2 + a^4 = a^2x^2 + a^2y^2 + a^2c^2$$

$$a^2y^2 - c^2y^2 + a^2x^2 = a^4 - a^2c^2$$

$$\left(\div a^2(a^2 - c^2)\right)y^2(a^2 - c^2) + a^2x^2 = a^2(a^2 - c^2)\left(\div a^2(a^2 - c^2)\right)$$

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{a^2 - c^2} = 1$$

Si: $a^2 = b^2 + c^2$, entonces $b^2 = a^2 - c^2$

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$$

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1}$$

Ecuación ordinaria

Es importante recordar la ecuación de la elipse vertical con centro en el origen

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Para una elipse vertical con centro fuera del origen en el punto (h, k), se hace una traslación de los ejes XY al punto $C(h, k)$.

Para trasladar el centro de la elipse al punto(h, k), se realiza un cambio de coordenadas. En lugar de usar las variables x e y directamente, ahora se expresa la distancia desde el nuevo centro de la elipse. Esto se hace sustituyendo x e y por $x - h$ e $y - k$, respectivamente:

$$x' = x - h$$

$$y' = y - k$$

En donde (x', y') son las nuevas coordenadas con respecto al centro de la elipse en $C(h, k)$:

$$\frac{x'^2}{b^2} + \frac{y'^2}{a^2} = 1$$

Al sustituir x, y', se obtiene la ecuación ordinaria de la elipse vertical con centro en (h, k)

$$\boldsymbol{\frac{(x - h)^2}{b^2} + \frac{(y - k)^2}{a^2} = 1}$$

Ecuación general

La ecuación general de la elipse vertical se obtiene al desarrollar su ecuación ordinaria

$$\frac{(x - h)^2}{b^2} + \frac{(y - k)^2}{a^2} = 1$$
$$\frac{x^2 - 2xh + h^2}{b^2} + \frac{y^2 - 2yk + k^2}{a^2} = 1$$
$$(a^2)(b^2)\ \frac{x^2 - 2xh + h^2}{b^2} + \frac{y^2 - 2yk + k^2}{a^2} = 1\ (a^2)(b^2)$$
$$a^2(x^2 - 2xh + h^2) + b^2(y^2 - 2yk + k^2) = a^2b^2$$
$$a^2x^2 - 2a^2xh + a^2h^2 + b^2y^2 - 2b^2yk + b^2k^2 = a^2b^2$$
$$a^2x^2 + b^2y^2 - 2a^2xh - 2b^2yk + a^2h^2 + b^2k^2 - a^2b^2 = 0$$
$$a^2x^2 + b^2y^2 - 2a^2xh - 2b^2yk + (a^2h^2 + b^2k^2 - a^2b^2) = 0$$

Asignando nuevos nombres a los coeficientes:

$$A = \mathrm{b}^2\ (coeficiente\ de\ x^2)$$

$$B = a^2 (coeficiente\ de\ y^2)$$

$$D = -2\mathrm{b}^2\mathrm{h}\ (coeficiente\ de\ x)$$

$$E = -2\mathrm{a}^2\mathrm{k}\ (coeficiente\ de\ y)$$

$$F = b^2h^2 + a^2k^2 - a^2b^2\ (término\ constante)$$

Obtenemos la ecuación general de la elipse vertical:

$$\boldsymbol{Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0}$$

En donde:

- A y B: Determinan la forma y la orientación de la elipse. En este caso, $A = b^2\ y\ B = a^2$, lo que indica que el eje mayor está alineado con el eje y (elipse vertical).
- D y E: Están relacionados con la traslación del centro de la elipse desde el origen a (h, k). Específicamente, $D = -2b^2h$ y $E = -2a^2k$.
- F: Término independiente, que depende de las coordenadas del centro (h, k) y las longitudes de los semiejes a y b.

Ecuación de la elipse que pasa por cuatro puntos

Para encontrar la ecuación se sustituyen los puntos dados en la ecuación general y así se obtiene un sistema de ecuaciones con cuatro incógnitas, la solución del sistema determina los coeficientes de la ecuación.

Ecuación de una elipse con vértice en el origen $(\boldsymbol{0,0})$ y una recta tangente en el punto $(\boldsymbol{x_0, y_0})$:

Para encontrar la ecuación de una elipse con centro en el origen (0,0) y una recta tangente en el punto (x_0, y_0), se debe derivar su ecuación canónica con respecto a y

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1}$$

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2}\right) = \frac{d}{dy}(1)$$

$$\frac{2y}{a^2} + \frac{2x}{b^2}\ \frac{dx}{dy} = 0$$

$$\frac{2x}{b^2}\ \frac{dx}{dy} = -\frac{2y}{a^2}$$

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{2y}{a^2}\left(\frac{b^2}{2x}\right)$$

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{b^2y}{a^2x}$$

Al sustituir el punto (x_0, y_0) en invirtiendo la derivada, se obtiene la pendiente de la recta tangente

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{b^2 y_0}{a^2 x_0}$$
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{a^2 x_0}{b^2 y_0}$$

La ecuación de la recta tangente en un punto (x_0, y_0) se puede expresar usando la forma punto-pendiente:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$m: pendiente\ de\ la\ recta\ tangente$$

Reemplazar m en la ecuación punto-pendiente

$$y - y_0 = -\frac{a^2 x_0}{b^2 y_0}\ (x - x_0)$$

$$y - y_0 = -\frac{a^2 x_0 x}{b^2 y_0} + \frac{a^2 x_0^2}{b^2 y_0}$$

$$y - y_0 + \frac{a^2 x_0 x}{b^2 y_0} - \frac{a^2 x_0^2}{b^2 y_0}\ = 0$$

$$(b^2 y_0)\ \ y - y_0 + \frac{a^2 x_0 x}{b^2 y_0} - \frac{a^2 x_0^2}{b^2 y_0}\ = 0\ \ (b^2 y_0)$$

$$b^2 y_0 y - b^2 y_0^2 + a^2 x_0 x - a^2 x_0^2 = 0$$

$$b^2 y_0 y + a^2 x_0 x = b^2 y_0^2 + a^2 x_0^2$$

Se conoce que el punto (x_0, y_0) satisface la ecuación canónica de la elipse vertical

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

$$\frac{x_0^2}{b^2} + \frac{y_0^2}{a^2} = 1$$

$$a^2 x_0^2 + \mathrm{b}^2 y_0^2 = a^2 b^2$$

Al sustituir:

$$a^2 x_0^2 + \mathrm{b}^2 y_0^2 = a^2 b^2$$

En

$$b^2 y_0 y + a^2 x_0 x = b^2 y_0^2 + a^2 x_0^2$$

Se obtiene:

$$b^2 y_0 y + a^2 x_0 x = a^2 b^2$$

$$\left(\frac{1}{a^2\, b^2}\right) b^2 y_0 y + a^2 x_0 x = a^2 b^2 \;\left(\frac{1}{a^2\, b^2}\right)$$

$$\frac{y_0 y}{a^2} + \frac{x_0 x}{b^2} = 1$$

$$\boldsymbol{\frac{x_0 x}{b^2} + \frac{y_0 y}{a^2} = 1}$$

Ecuación de una elipse con vértice $(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{k})$ y una recta tangente en el punto

Para encontrar la ecuación de una elipse con centro en (h, k) y una recta tangente en el punto (x_0, y_0), se debe derivar su ecuación ordinaria con respecto a y

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

$$\frac{d}{dy}\left[\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2}\right] = \frac{d}{dy}(1)$$

$$\frac{2(x-h)}{b^2}\frac{dx}{dy} + \frac{2(y-k)}{a^2} = 0$$

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{2(y-k)}{a^2}\left(\frac{b^2}{2(x-h)}\right)$$

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{b^2(y-k)}{a^2(x-h)}$$

Al sustituir el punto (x_0, y_0) e invertir la derivada, se obtiene la pendiente de la recta tangente

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{b^2(y_0-k)}{a^2(x_0-h)}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{a^2}{b^2}\,\frac{(x_0-h)}{(y_0-k)}$$

La ecuación de la recta tangente en un punto (x_0, y_0) se puede expresar usando la forma punto-pendiente:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$m\text{: } pendiente\ de\ la\ recta\ tangente$$

Reemplazar m en la ecuación punto-pendiente

$$y - y_0 = -\frac{a^2}{b^2}\,\frac{(x_0-h)}{(y_0-k)}(x - x_0)$$

$$b^2(y - y_0)(y_0 - k) = -a^2\,(x_0 - h)(x - x_0)$$

$$\left(\frac{1}{a^2b^2}\right)\ [b^2(y-y_0)(y_0-k)+a^2(x_0-h)(x-x_0)]=0\ \ \left(\frac{1}{a^2b^2}\right)$$
$$\frac{(x_0-h)(x-x_0)}{b^2}+\frac{(y-y_0)(y_0-k)}{a^2}=0$$

Se conoce que el punto (x_0, y_0) satisface la ecuación ordinaria de la elipse horizontal

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$
$$\frac{(x_0-h)^2}{b^2}+\frac{(y_0-k)^2}{a^2}=1$$

En la geometría analítica, hay un resultado conocido que permite encontrar la ecuación de la tangente de manera directa. Este método consiste en reemplazar los términos cuadráticos de la ecuación de la cónica por productos lineales para el punto de tangencia.

Dado que queremos la tangente en el punto (x_0, y_0) se reemplaza los términos cuadráticos de la ecuación de la elipse

$$(x_0-h)^2\ se\ reemplaza\ por\ (x_0-h)(x-x_0)$$

$$(y_0-k)^2\ se\ reemplaza\ por\ (y-y_0)(y_0-k)$$

Llevando a la ecuación de una elipse con centro en (h, k) y una recta tangente en el punto (x_0, y_0)

$$\boldsymbol{\frac{(x_0-h)(x-x_0)}{b^2}+\frac{(y-y_0)(y_0-k)}{a^2}=1}$$

- **Tratamiento Formal**:

Condición

$$a^2=b^2+c^2$$
$$a>b;\ a>c$$

Tabla 3.

Tratamiento Formal Cónica: Elipse

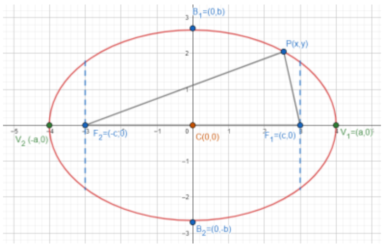
Ecuación General $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

$$A \neq C$$

Elipse Horizontal	**Ecuación**	**Elementos**

Figura 14.

Elipse Horizontal con C (0,0)



Nota. Elaborado por Karina Vega

Ecuación Canónica

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$V(\pm a, 0)$

$F(\pm c, 0)$

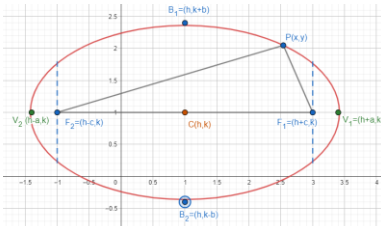
$B(0, \pm b)$

$LR = \frac{2b^2}{a}$

$e = \frac{c}{a} \ (e < 1)$

Figura 15.

Elipse Horizontal con C (h,k)



Nota. Elaborado por Karina Vega

Ecuación Ordinaria

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

$V: (h, \pm a, k)$

$F(h \pm c, k)$

$B\ (h, k \pm b)$

Ecuación de una elipse con vértice en el origen $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ y una recta tangente en el punto $(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0})$:

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$$

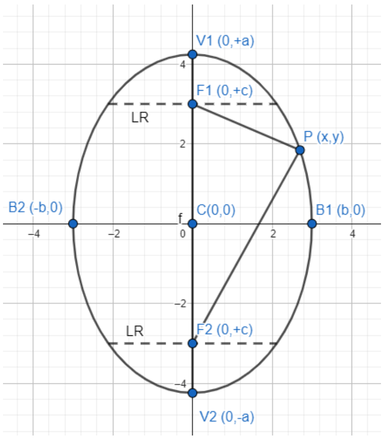
Ecuación de una elipse con vértice $(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{k})$ y una recta tangente en el punto $(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0})$

$$\frac{(x_0 - h)(x - x_0)}{a^2} + \frac{(y - y_0)(y_0 - k)}{b^2} = 0$$

Elipse Vertical	**Ecuación**	**Elementos**

Figura 16.

Elipse Vertical con C (0,0)



Ecuación Canónica

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

$$V(0,\pm a)$$

$$F(0,\pm c)$$

$$B(\pm b,0)$$

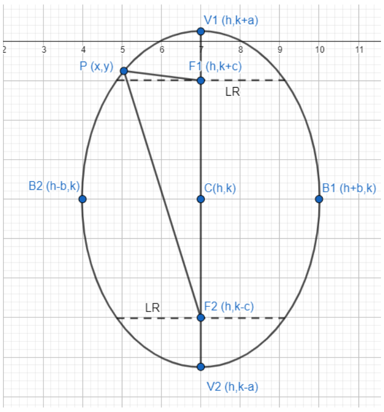
$$LR=\frac{2b^2}{a}$$

$$e=\frac{c}{a}\ \ (e<1)$$

Nota. Elaborado por Karina Vega

Figura 17.

Elipse Vertical con C (h,k)



Ecuación Ordinaria

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

$$V:(h,k\pm a)$$

$$F(h,k\pm c)$$

$$B\ (h\pm b,k)$$

Nota. Elaborado por Karina Vega

Ecuación de una elipse con vértice en el origen $(\mathbf{0},\mathbf{0})$ y una recta tangente en el punto $(\boldsymbol{x_0},\boldsymbol{y_0})$

$$\frac{x_0x}{b^2}+\frac{y_0y}{a^2}=1$$

Ecuación de una elipse con vértice $(\boldsymbol{h},\boldsymbol{k})$ y una recta tangente en el punto $(\boldsymbol{x_0},\boldsymbol{y_0})$

$$\frac{(\boldsymbol{x_1}-\boldsymbol{h})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{h})}{\boldsymbol{b^2}}+\frac{(\boldsymbol{y_1}-\boldsymbol{k})(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{k})}{\boldsymbol{a^2}}=\mathbf{1}$$

Nota. Extraído de (Pearson, 2009)

HIPÉRBOLA

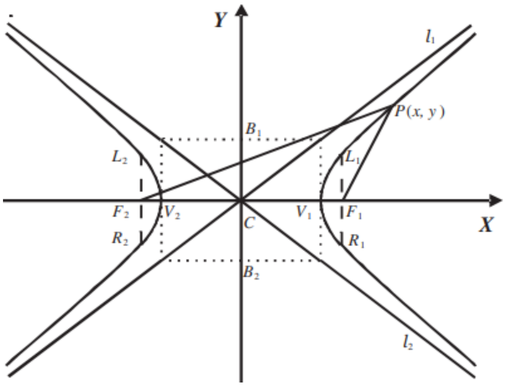
"La hipérbola es el lugar geométrico que describe un punto del plano que se mueve de tal manera que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos llamados focos, es siempre constante". (Pearson, 2009)

Matemáticamente se encuentra definida de la siguiente forma:

$$|\overline{PF_1} - \overline{PF_2} = | = 2a$$

Figura 18.

Hipérbola

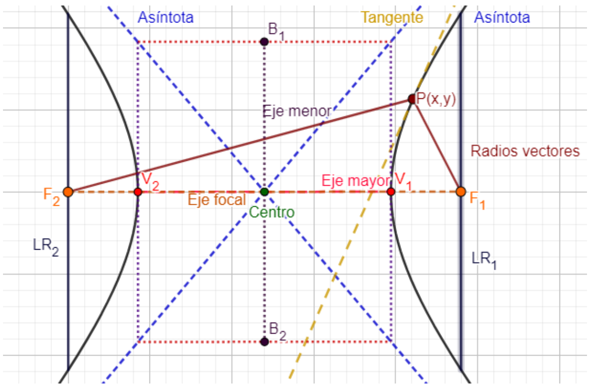


Nota. Tomado de (Pearson, 2009)

- Puntos y líneas notables

Figura 19.

Puntos y líneas notables en la hipérbola



Nota. Elaborado por Karina Vega

PUNTOS

- Centro (C): El punto donde se cruzan los ejes de simetría de la hipérbola.
- Focos (F_1, F_2): Dos puntos fijos dentro de las ramas de la hipérbola; la diferencia de las distancias desde cualquier punto de la hipérbola a ambos focos es constante.
- Vértices (V_1, V_2): Los puntos donde la hipérbola intersecta su eje real (eje principal).
- Extremos del Eje Menor; co-vértices (B_1, B_2): Puntos que encuentran sobre el eje menor, a una distancia del centro igual a la longitud del semieje conjugado. Puntos que indican la anchura de una hipérbola.

LÍNEAS

- Eje mayor/transverso: La línea que pasa por los vértices y el centro.
- Eje menor/conjugado: Línea perpendicular al eje real que pasa por el centro y define el ancho de la hipérbola.
- Eje focal: Segmento que une los dos focos, pasando por el centro.
- Radio vector: Segmentos que conectan cualquier punto de la hipérbola con cada uno de los focos. La diferencia entre las longitudes de estos segmentos es constante.
- Rectas tangentes: Son líneas que tocan la hipérbola en un solo punto y no cruzan la curva.
- Lado recto: Es el segmento perpendicular al eje transverso que pasa por uno de los focos. Su longitud es proporcional a la distancia entre los vértices y los focos.
- Asíntotas: Líneas rectas que se acercan a la hipérbola, pero nunca la tocan.

- **Características Geométricas:**

- La hipérbola es simétrica con respecto a sus ejes principal y secundario. Los puntos equidistantes a los dos focos tienen la misma diferencia de distancia.
- El eje mayor (2a) es la distancia entre los vértices de la hipérbola, y el eje menor (2b) es la distancia entre los puntos donde se cortan las dos ramas de la hipérbola.
- La excentricidad de la hipérbola, representada por "e", es una medida de su "apertura" y se calcula como la razón de la distancia focal "c" y la longitud del eje mayor "2a". La excentricidad siempre es mayor a 1.
- Las dos ramas de la hipérbola se extienden hacia el infinito y nunca se encuentran. Cada rama tiene una asíntota, que es una línea recta a la que la curva se acerca indefinidamente a medida que se aleja.

- **Deducción de las ecuaciones de la hipérbola**

HIPÉRBOLA HORIZONTAL

Ecuación canónica

Sea $P(x,y)$ un punto de la hipérbola, su definición se puede expresar matemáticamente se la siguiente manera

$$|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$\left(\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2 = \left(2a + \sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2$$

$$(x+c)^2+y^2 = 4\mathrm{a}^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + [(x-c)^2+y^2]$$

$$x^2+2cx+c^2+y^2 = 4\mathrm{a}^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$$

$$2cx = 4\mathrm{a}^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} - 2cx$$

$$(\div 4a)\ 4cx = 4\mathrm{a}^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}\ \ (\div 4a)$$

$$\frac{cx}{a} = \mathrm{a} + \sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$\left(\frac{cx}{a} - \mathrm{a}\right)^2 = \left(\sqrt{(x-c)^2+y^2}\ \right)^2$$

$$\frac{c^2x^2}{a^2} - 2\,cx + a^2 = x^2 - 2cx + c^2 + y^2$$

$$\frac{c^2x^2}{a^2} + a^2 - x^2 - c^2 - y^2 = 0$$

$$(\div c^2 - a^2)\frac{c^2-a^2}{a^2}x^2 - y^2 = c^2 - a^2\ (\div c^2 - a^2)$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2-a^2} = 1$$

Condición

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$b^2 = a^2 - c^2$$

Al reemplazar, se obtiene la ecuación canónica de la hipérbola horizontal

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Ecuación ordinaria

Es importante recordar la ecuación de la hipérbola horizontal con centro en el origen

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Para una hipérbola horizontal con centro fuera del origen en el punto (h, k), se hace una traslación de los ejes XY al punto $C(h, k)$.

Para trasladar el centro de la hipérbola al punto(h, k), se realiza un cambio de coordenadas. En lugar de usar las variables $x\ e\ y$ directamente, ahora se expresa la distancia desde el nuevo centro de la hipérbola. Esto se hace sustituyendo $x\ e\ y$ por $x - h\ e\ y - k$, respectivamente:

$$x' = x - h$$

$$y' = y - k$$

En donde (x', y') son las nuevas coordenadas con respecto al centro de la hipérbola en $C(h, k)$:

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

Al sustituir $x',\ y'$, se obtiene la ecuación ordinaria de la hipérbola horizontal con centro en (h, k)

$$\boldsymbol{\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1}$$

Ecuación general

La ecuación general de la hipérbola horizontal se obtiene al desarrollar su ecuación ordinaria

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$
$$\frac{x^2 - 2xh + h^2}{a^2} - \frac{y^2 - 2yk + k^2}{b^2} = 1$$

$$(a^2)(b^2)\ \frac{x^2-2xh+h^2}{a^2}-\frac{y^2-2yk+k^2}{b^2}=1\ (a^2)(b^2)$$
$$b^2(x^2-2xh+h^2)-a^2(y^2-2yk+k^2)=a^2b^2$$
$$b^2x^2-2b^2xh+b^2h^2-a^2y^2+2a^2yk-a^2k^2=a^2b^2$$
$$b^2x^2-a^2y^2-2b^2xh+2a^2yk+b^2h^2-a^2k^2-a^2b^2=0$$
$$b^2x^2-a^2y^2-2b^2xh+2a^2yk+(b^2h^2-a^2k^2-a^2b^2)=0$$

Asignando nuevos nombres a los coeficientes:

$$A=\mathrm{b}^2\ (coeficiente\ de\ x^2)$$

$$B=-a^2(coeficiente\ de\ y^2)$$

$$\mathrm{C}=-2\mathrm{b}^2\mathrm{h}\ (coeficiente\ de\ x)$$

$$D=\ 2\mathrm{a}^2\mathrm{k}\ (coeficiente\ de\ y)$$

$$\mathrm{E}=b^2h^2-a^2k^2-a^2b^2\ (término\ constante)$$

Obtenemos la ecuación general de la hipérbola horizontal:

$$\boldsymbol{Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0}$$

En donde:

- A y B: Determinan la abertura de la hipérbola en el eje $x\ e\ y$, respectivamente.
- C y D: Relacionados con el desplazamiento del centro (h,k)
- E: Refleja la relación entre el tamaño de los ejes y la posición del centro.

Ecuación de una hipérbola con vértice en el origen $(\mathbf{0},\mathbf{0})$ y una recta tangente en el punto $(\boldsymbol{x_0},\boldsymbol{y_0})$:

Para encontrar la ecuación de una hipérbola con centro en el origen (0,0) y una recta tangente en el punto (x_0,y_0), se debe derivar su ecuación canónica con respecto a x

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)=\frac{d}{dx}(1)$$
$$\frac{2x}{a^2}-\frac{2y}{b^2}\frac{dy}{dx}=0$$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x}{a^2}\left(\frac{b^2}{2y}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b^2x}{a^2y}$$

Al sustituir el punto (x_0, y_0) en la derivada, se obtiene la pendiente de la recta tangente

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b^2x_0}{a^2y_0}$$

La ecuación de la recta tangente en un punto (x_0, y_0) se puede expresar usando la forma punto-pendiente:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$m{:}\ pendiente\ de\ la\ recta\ tangente$$

Reemplazar m en la ecuación punto-pendiente

$$y - y_0 = \frac{b^2x_0}{a^2y_0}(x - x_0)$$

$$y - y_0 = \frac{b^2x_0x}{a^2y_0} - \frac{b^2x_0^2}{a^2y_0}$$

$$y - y_0 - \frac{b^2x_0x}{a^2y_0} + \frac{b^2x_0^2}{a^2y_0} = 0$$

$$(a^2y_0)\ \ y - y_0 - \frac{b^2x_0x}{a^2y_0} + \frac{b^2x_0^2}{a^2y_0} = 0\ \ (a^2y_0)$$

$$a^2y_0y - a^2y_0^2 - b^2x_0x + b^2x_0^2 = 0$$

$$a^2y_0y - b^2x_0x = a^2y_0^2 - b^2x_0^2$$

Se conoce que el punto (x_0, y_0) satisface la ecuación canónica de la hipérbola horizontal

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1$$

$$(-1)\ b^2x_0^2 - \mathrm{a}^2y_0^2 = a^2b^2\ (-1)$$

$$\mathrm{a}^2y_0^2 - b^2x_0^2 = -a^2b^2$$

Al sustituir:

$$\mathrm{a}^2y_0^2 - b^2x_0^2 = -a^2b^2$$

En

$$a^2y_0y - b^2x_0x = a^2y_0^2 - b^2x_0^2$$

Se obtiene:

$$a^2y_0y - b^2x_0x = -a^2b^2$$

$$\left(-\frac{1}{a^2\,b^2}\right)\,a^2y_0y - b^2x_0x = -a^2b^2\,\left(-\frac{1}{a^2\,b^2}\right)$$

$$-\frac{y_0y}{b^2} + \frac{x_0x}{a^2} = 1$$

$$\boldsymbol{\frac{x_0x}{a^2} - \frac{y_0y}{b^2} = 1}$$

Ecuación de una hipérbola con vértice $(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{k})$ y una recta tangente en el punto $(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0})$

Para encontrar la ecuación de una hipérbola con centro en (h, k) y una recta tangente en el punto (x_0, y_0), se debe derivar su ecuación ordinaria con respecto a x

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2}\right] = \frac{d}{dx}(1)$$

$$\frac{2(x-h)}{a^2} - \frac{2(y-k)}{b^2}\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2(x-h)}{a^2}\left(-\frac{b^2}{2(y-k)}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b^2}{a^2}\,\frac{(x-h)}{(y-k)}$$

Al sustituir el punto (x_0, y_0) en la derivada, se obtiene la pendiente de la recta tangente

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b^2(x_0-h)}{a^2(y_0-k)}$$

La ecuación de la recta tangente en un punto (x_0, y_0) se puede expresar usando la forma punto-pendiente:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$m\text{: } pendiente\ de\ la\ recta\ tangente$$

Reemplazar m en la ecuación punto-pendiente

$$y - y_0 = \frac{b^2}{a^2}\,\frac{(x_0-h)}{(y_0-k)}(x - x_0)$$

$$a^2(y - y_0)(y_0 - k) = b^2(x_0 - h)(x - x_0)$$

$$\left(\frac{1}{a^2b^2}\right)\ [a^2(y-y_0)(y_0-k)-b^2(x_0-h)(x-x_0)]=0\ \left(\frac{1}{a^2b^2}\right)$$
$$\frac{(x_0-h)(x-x_0)}{a^2}-\frac{(y-y_0)(y_0-k)}{b^2}=0$$

Se conoce que el punto (x_0, y_0) satisface la ecuación ordinaria de la hipérbola horizontal

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$
$$\frac{(x_0-h)^2}{a^2}-\frac{(y_0-k)^2}{b^2}=1$$

En la geometría analítica, hay un resultado conocido que permite encontrar la ecuación de la tangente de manera directa. Este método consiste en reemplazar los términos cuadráticos de la ecuación de la cónica por productos lineales para el punto de tangencia.

Dado que queremos la tangente en el punto (x_0, y_0) se reemplaza los términos cuadráticos de la ecuación de la hipérbola

$$(x_0-h)^2\ se\ reemplaza\ por\ (x_0-h)(x-x_0)$$

$$(y_0-k)^2\ se\ reemplaza\ por\ (y-y_0)(y_0-k)$$

Llevando a la ecuación de una hipérbola con centro en (h, k) y una recta tangente en el punto (x_0, y_0)

$$\boldsymbol{\frac{(x_0-h)(x-x_0)}{a^2}-\frac{(y-y_0)(y_0-k)}{b^2}=1}$$

HIPÉRBOLA VERTICAL

Ecuación canónica

Sea $P(x,y)$ un punto de la hipérbola, su definición se puede expresar matemáticamente se la siguiente manera

$$|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = 2a$$

$$\sqrt{x^2 + (y+c)^2} - \sqrt{x^2 + (y-c)^2} = 2a$$

$$\sqrt{x^2 + (y+c)^2} = 2a + \sqrt{x^2 + (y-c)^2}$$

$$\left(\sqrt{x^2 + (y+c)^2}\right)^2 = \left(2a + \sqrt{x^2 + (y-c)^2}\right)^2$$

$$x^2 + (y+c)^2 = 4\mathrm{a}^2 + 4a\sqrt{x^2 + (y-c)^2} + [x^2 + (y-c)^2]$$

$$x^2 + y^2 + 2cy + c^2 = 4\mathrm{a}^2 + 4a\sqrt{x^2 + (y-c)^2} + x^2 + y^2 - 2cy + c^2$$

$$2cy = 4\mathrm{a}^2 + 4a\sqrt{x^2 + (y-c)^2} - 2cy$$

$$(\div 4a)\ 4cy = 4\mathrm{a}^2 + 4a\sqrt{x^2 + (y-c)^2}\ \ (\div 4a)$$

$$\frac{cy}{a} = \mathrm{a} + \sqrt{x^2 + (y-c)^2}$$

$$\left(\frac{cy}{a} - \mathrm{a}\right)^2 = \left(\sqrt{x^2 + (y-c)^2}\right)^2$$

$$\frac{c^2y^2}{a^2} - 2\,cy + a^2 = x^2 + y^2 - 2cy + c^2$$

$$\frac{c^2y^2}{a^2} + a^2 - x^2 - c^2 - y^2 = 0$$

$$(\div c^2 - a^2)\frac{c^2 - a^2}{a^2}y^2 - x^2 = c^2 - a^2\ (\div c^2 - a^2)$$

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{c^2 - a^2} = 1$$

Condición

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$b^2 = a^2 - c^2$$

Al reemplazar, se obtiene la ecuación canónica de la hipérbola vertical

$$\boldsymbol{\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1}$$

Ecuación ordinaria

Es importante recordar la ecuación de la hipérbola vertical con centro en el origen

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Para una hipérbola vertical con centro fuera del origen en el punto (h, k), se hace una traslación de los ejes XY al punto $C(h, k)$.

Para trasladar el centro de la hipérbola al punto(h, k), se realiza un cambio de coordenadas. En lugar de usar las variables $x\ e\ y$ directamente, ahora se expresa la distancia desde el nuevo centro de la hipérbola. Esto se hace sustituyendo $x\ e\ y$ por $x - h\ e\ y - k$, respectivamente:

$$x' = x - h$$

$$y' = y - k$$

En donde (x', y') son las nuevas coordenadas con respecto al centro de la hipérbola en $C(h, k)$:

$$\frac{y'^2}{a^2} - \frac{x'^2}{b^2} = 1$$

Al sustituir x', y', se obtiene la ecuación ordinaria de la hipérbola vertical con centro en (h, k)

$$\boldsymbol{\frac{(y - k)^2}{a^2} - \frac{(x - h)^2}{b^2} = 1}$$

Ecuación general

La ecuación general de la hipérbola vertical se obtiene al desarrollar su ecuación ordinaria

$$\frac{(y - k)^2}{a^2} - \frac{(x - h)^2}{b^2} = 1$$
$$\frac{y^2 - 2yk + k^2}{a^2} - \frac{x^2 - 2xh + h^2}{b^2} = 1$$
$$(a^2)(b^2)\ \frac{y^2 - 2yk + k^2}{a^2} - \frac{x^2 - 2xh + h^2}{b^2} = 1\ (a^2)(b^2)$$
$$b^2(y^2 - 2yk + k^2) - a^2(x^2 - 2xh + h^2) = a^2b^2$$
$$b^2y^2 - 2b^2yk + b^2k^2 - a^2x^2 + 2a^2xh - a^2h^2 = a^2b^2$$
$$b^2y^2 - 2b^2yk + b^2k^2 - a^2x^2 + 2a^2xh - a^2h^2 - a^2b^2 = 0$$

$$-a^2x^2+b^2y^2+2a^2xh-2b^2yk+(b^2k^2-a^2h^2-a^2b^2)=0$$

Asignando nuevos nombres a los coeficientes:

$$A=-\mathrm{a}^2\ (coeficiente\ de\ x^2)$$

$$B=\mathrm{b}^2(coeficiente\ de\ y^2)$$

$$C=\ 2\mathrm{a}^2\mathrm{h}\ (coeficiente\ de\ x)$$

$$D=\ -2b^2\mathrm{k}\ (coeficiente\ de\ y)$$

$$F=b^2k^2-a^2h^2-a^2b^2(término\ constante)$$

Obtenemos la ecuación general de la hipérbola vertical:

$$\boldsymbol{Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0}$$

En donde:

- A: El signo es negativo porque la hipérbola es vertical.
- B: El signo es positivo, lo que indica que el eje de simetría es vertical. Determinan la abertura de la hipérbola en los ejes $x\ e\ y$, respectivamente.
- C: Aparece cuando la hipérbola está desplazada del origen en la dirección horizontal (cuando el centro no está en el origen). Si la hipérbola está centrada en el origen $C=0$.
- D: Refleja el desplazamiento vertical del centro de la hipérbola. Si el centro está en el origen $D=0$.
- E: Contribuye a ajustar la ecuación cuando el centro de la hipérbola está desplazado del origen.

Ecuación de una hipérbola con vértice en el origen $(\mathbf{0},\mathbf{0})$ y una recta tangente en el punto $(\boldsymbol{x_0},\boldsymbol{y_0})$:

Para encontrar la ecuación de una hipérbola con centro en el origen (0,0) y una recta tangente en el punto (x_0,y_0), se debe derivar su ecuación canónica con respecto a y

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$$

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}\right)=\frac{d}{dy}(1)$$

$$\frac{2y}{a^2}-\frac{2x}{b^2}\ \frac{dx}{dy}=0$$

$$\frac{2x}{b^2}\ \frac{dx}{dy}=\frac{2y}{a^2}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{a^2}\left(\frac{b^2}{2x}\right)$$
$$\frac{dx}{dy} = \frac{b^2y}{a^2x}$$

Al sustituir el punto (x_0, y_0) en invirtiendo la derivada, se obtiene la pendiente de la recta tangente

$$\frac{dx}{dy} = \frac{b^2y}{a^2x}$$
$$\frac{dx}{dy} = \frac{b^2y_0}{a^2x_0}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{a^2x_0}{b^2y_0}$$

La ecuación de la recta tangente en un punto (x_0, y_0) se puede expresar usando la forma punto-pendiente:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$m: pendiente\ de\ la\ recta\ tangente$$

Reemplazar m en la ecuación punto-pendiente

$$y - y_0 = \frac{a^2x_0}{b^2y_0}\ \ (x - x_0)$$

$$y - y_0 = \frac{a^2x_0x}{b^2y_0} - \frac{a^2x_0^2}{b^2y_0}$$

$$y - y_0 - \frac{a^2x_0x}{b^2y_0} + \frac{a^2x_0^2}{b^2y_0}\ = 0$$

$$(b^2y_0)\ \ y - y_0 - \frac{a^2x_0x}{b^2y_0} + \frac{a^2x_0^2}{b^2y_0}\ = 0\ \ (b^2y_0)$$

$$b^2y_0y - b^2y_0^2 - a^2x_0x + a^2x_0^2\ = 0$$

$$b^2y_0y - a^2x_0x = b^2y_0^2 - a^2x_0^2$$

Se conoce que el punto (x_0, y_0) satisface la ecuación canónica de la hipérbola vertical

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{y_0^2}{a^2} - \frac{x_0^2}{b^2} = 1$$

$$\mathrm{b}^2y_0^2 - a^2x_0^2\ = a^2b^2$$

Al sustituir:

$$b^2y_0^2 - a^2x_0^2 = a^2b^2$$

En

$$b^2y_0y - a^2x_0x = b^2y_0^2 - a^2x_0^2$$

Se obtiene:

$$b^2y_0y - a^2x_0x = a^2b^2$$

$$\left(\frac{1}{a^2\,b^2}\right)b^2y_0y - a^2x_0x = a^2b^2\,\left(\frac{1}{a^2\,b^2}\right)$$

$$\boldsymbol{\frac{y_0y}{a^2} - \frac{x_0x}{b^2} = 1}$$

Ecuación de una elipse con vértice $(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{k})$ y una recta tangente en el punto $(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0})$

Para encontrar la ecuación de una hipérbola con centro en (h, k) y una recta tangente en el punto (x_0, y_0), se debe derivar su ecuación ordinaria con respecto a y

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{d}{dy}\left[\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2}\right] = \frac{d}{dy}(1)$$

$$\frac{2(y-k)}{a^2} - \frac{2(x-h)}{b^2}\frac{dx}{dy} = 0$$

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{2(y-k)}{a^2}\left(-\frac{b^2}{2(x-h)}\right)$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{b^2(y-k)}{a^2(x-h)}$$

Al sustituir el punto (x_0, y_0) e invertir la derivada, se obtiene la pendiente de la recta tangente

$$\frac{dx}{dy} = \frac{b^2(y_0-k)}{a^2(x_0-h)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a^2}{b^2}\,\frac{(x_0-h)}{(y_0-k)}$$

La ecuación de la recta tangente en un punto (x_0, y_0) se puede expresar usando la forma punto-pendiente:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$m\text{: } pendiente\ de\ la\ recta\ tangente$$

Reemplazar m en la ecuación punto-pendiente

$$y - y_0 = \frac{a^2}{b^2}\,\frac{(x_0 - h)}{(y_0 - k)}(x - x_0)$$

$$b^2(y - y_0)(y_0 - k) = a^2\,(x_0 - h)(x - x_0)$$

$$\left(\frac{1}{a^2b^2}\right)\ [b^2(y - y_0)(y_0 - k) - a^2(x_0 - h)(x - x_0)] = 0\ \left(\frac{1}{a^2b^2}\right)$$

$$\frac{(y - y_0)(y_0 - k)}{a^2} - \frac{(x_0 - h)(x - x_0)}{b^2} = 0$$

Se conoce que el punto (x_0, y_0) satisface la ecuación ordinaria de la hipérbola vertical

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(y_0-k)^2}{a^2} - \frac{(x_0-h)^2}{b^2} = 1$$

En la geometría analítica, hay un resultado conocido que permite encontrar la ecuación de la tangente de manera directa. Este método consiste en reemplazar los términos cuadráticos de la ecuación de la cónica por productos lineales para el punto de tangencia.

Dado que queremos la tangente en el punto (x_0, y_0) se reemplaza los términos cuadráticos de la ecuación de la hipérbola

$$(x_0-h)^2\ se\ reemplaza\ por\ (x_0 - h)(x - x_0)$$

$$(y_0-k)^2\ se\ reemplaza\ por\ (y - y_0)(y_0 - k)$$

Llevando a la ecuación de una hipérbola con centro en (h, k) y una recta tangente en el punto (x_0, y_0)

$$\boldsymbol{\frac{(y - y_0)(y_0 - k)}{a^2} - \frac{(x_0 - h)(x - x_0)}{b^2} = 1}$$

- **Tratamiento Formal:**

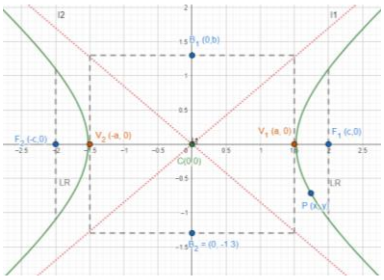
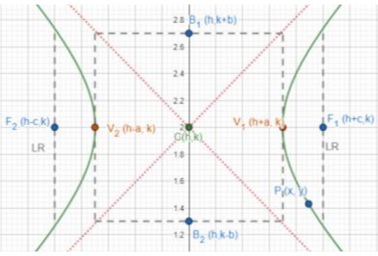
Condición

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$a > b\,, a > c$$

Tabla 4.

Tratamiento Formal Cónica: Hipérbola

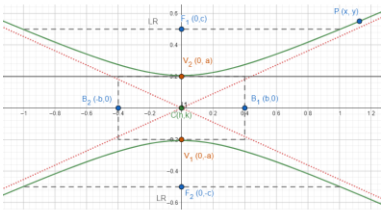
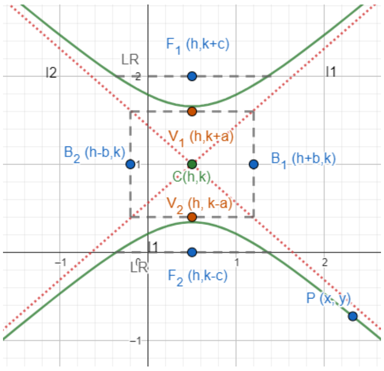
Ecuación General: $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ $\quad (A = -C)$		
Hipérbola Horizontal	**Ecuación**	**Elementos**
Figura 20. *Hipérbola Horizontal con C (0,0)*  *Nota.* Elaborado por Karina Vega	**Ecuación canónica** $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$V: (\pm a, 0)$ $F(\pm c, 0)$ $B\ (0, \pm b)$ **Ecuaciones de las asíntotas** $I_{1,2}: y = \pm \frac{b}{a}\, x$
Figura 21. *Hipérbola Horizontal con C (h,k)*  *Nota.* Elaborado por Karina Vega	**Ecuación Ordinaria** $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	$V: (h\ \pm a, k)$ $F(h \pm c, k\ )$ $B\ (h, k \pm b)$ **Ecuaciones de las asíntotas** $I_{1,2}: (y-k) = \pm \frac{b}{a}\ (x-h)$

Ecuación de una hipérbola con vértice en el origen $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ y una recta tangente en el punto $(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0})$:

$$\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1$$

Ecuación de una hipérbola con vértice $(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{k})$ y una recta tangente en el punto $(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0})$:

$$\frac{(x_0 - h)(x - h)}{a^2} - \frac{(y_0 - k)(y - k)}{b^2} = 1$$

Hipérbola Vertical	Ecuación	Elementos
Figura 22. *Hipérbola Vertical con C (0,0)*  *Nota.* Elaborado por Karina Vega	**Ecuación canónica** $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$	$V: (0, \pm a)$ $F(0, \pm c\ )$ $B\ (\pm b, 0)$ **Ecuaciones de las asíntotas** $l_{1,2}: y = \pm\ \frac{a}{b}\ x$
Figura 23. *Hipérbola Vertical con C (h,k)*  *Nota.* Elaborado por Karina Vega	**Ecuación Ordinaria** $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$	$V: (h, k \pm a)$ $F(h, k \pm c\ )$ $B\ (h \pm b, k)$ **Ecuaciones de las asíntotas** $l_{1,2}: (y-k) = \pm\ \frac{a}{b}\ (x-h)$

Ecuación de una hipérbola con vértice en el origen $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ y una recta tangente en el punto $(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0})$:

$$\frac{y_0 y}{a^2} - \frac{x_0 x}{b^2} = 1$$

Ecuación de una hipérbola con vértice $(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{k})$ y una recta tangente en el punto $(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0})$:

$$\frac{(y_0 - k)(y - \mathrm{k})}{a^2} - \frac{(x_0 - h)(x - h)}{b^2} = 1$$

Nota. Extraído de (Pearson, 2009)

2.2.2.1.5 Aplicaciones de las secciones cónicas

Las secciones cónicas tienen diversas aplicaciones en distintos campos, desde la física hasta la ingeniería y más allá. (De Padua & Montalvo, 2023). A continuación, se presentan las aplicaciones específicas para cada tipo de cónica:

Circunferencia:

- Ingeniería Civil: Los círculos se utilizan en el diseño y la construcción de infraestructuras, como rotondas y puentes.
- Óptica: Lentes y espejos circulares son esenciales en dispositivos ópticos, como cámaras y telescopios.
- Geolocalización: Las coordenadas geográficas suelen ser representadas por una circunferencia en los mapas.

Parábola:

- Ingeniería de Proyectiles: La trayectoria de un proyectil lanzado bajo la gravedad sigue una parábola.
- Ingeniería de Puentes: La forma en los arcos parabólicos proporcionan una distribución uniforme en la carga.
- Iluminación de Reflectores: Los reflectores parabólicos se utilizan para dirigir la luz en dispositivos como faros y reflectores de automóviles.

Elipse:

- Astronomía: Las órbitas planetarias y las trayectorias de los cometas a menudo siguen formas elípticas.
- Óptica: La forma de ciertos espejos y lentes se pueden describir mediante elipses, como los faros de los automóviles.
- Ingeniería: Las elipses se aplican en el diseño de antenas parabólicas y en la mejora de la aerodinámica de ciertos vehículos.

Hipérbola:

- Astronomía: La ley de gravitación de Newton describe las órbitas planetarias como hipérbolas en sistemas de referencia inerciales.
- Comunicaciones Satelitales: Las hipérbolas se utilizan en la determinación de la posición de satélites mediante la triangulación de señales
- Órbitas Espaciales: Algunas trayectorias orbitales que siguen trayectorias hiperbólicas y son utilizadas en misiones interplanetarias.

2.2.3 Estrategia Metodológica

Las "estrategias metodológicas constituyen la forma de llevar a la práctica los principios metodológicos, es decir, la puesta en práctica de forma didáctica y pedagógica, de la propia metodología" (Campuseducación, 2020).

Por lo tanto, las "estrategias metodológicas son las que permiten identificar principios y criterios, a través de métodos, técnicas y procedimientos que constituyen una secuencia ordenada y planificada donde permite la construcción de conocimientos durante el proceso enseñanza y aprendizaje" (Quintero, 2011).

De acuerdo a Gallego y Salvador (2002) consideran a "las estrategias metodológicas como estrategias didácticas, concibiendolas como estructuras de actividad en las que se hacen reales los objetivos y contenidos". En este sentido, pueden considerarse análogas a las técnicas. En el concepto de estrategias didácticas, se incluyen tanto las estrategias de aprendizaje (perspectiva del alumno) como las estrategias de enseñanza (perspectiva del profesor).

En definitiva, las estrategias metodológicas son el conjunto de procedimientos que tienen un fin en común, lograr un aprendizaje dialógico, constituidas por recursos esenciales que diseñan y desarrollan procesos de enseñanza y aprendizaje efectivos.

2.2.3.1 Importancia de una estrategia metodológica

Según García et al. (2021), "las estrategias de enseñanza bien establecidas por el docente permiten a los estudiantes un mayor conocimiento, debido a que podemos considerarlas como las herramientas fundamentales para el aprendizaje". De este modo, los procesos de enseñanza y de aprendizaje se presentan juntos, por ende, las estrategias metodológicas utilizadas por el docente tienen un impacto significativo en los resultados que presentan los estudiantes.

La implementación de estrategias metodológicas en la enseñanza y el aprendizaje no solo es beneficioso para los estudiantes, también engrandece la labor docente, creando un efectivo ambiente educativo.

2.2.3.2 Métodos, técnicas y estrategias de enseñanza y de aprendizaje

2.2.3.2.1 Método

De acuerdo a Martínez (1999), método "es la vía que facilita el descubrimiento de conocimientos seguros y confiables para solucionar los problemas que la vida nos plantea".

Método de enseñanza

El método de enseñanza por su parte, "constituye la secuencia de acciones, actividades u operaciones del que enseña, las cuales expresan la naturaleza de las formas académicas de organización del proceso de enseñanza" (Navarro & Samón, 2017).

Clasificación de métodos de enseñanza

Los métodos de enseñanza ayudan al profesorado a crear experiencias de aprendizaje significativas en los estudiantes para que puedan alcanzar su máximo potencial. A continuación se presenta la clasificación de los métodos de enseñanza según algunos autores:

Tabla 5.
Métodos de Enseñanza

Métodos de enseñanza		
Métodos en cuanto a la forma de razonamiento	Método deductivo	Utilizado cuando el argumento que se estudia está referido al proceso del razonamiento o raciocinio que trasciende de lo universal a lo particular (Toledo Castillo et al., 2022).
	Método inductivo	Instrucción que comienza con un reto cuya solución requiere un conocimiento que no ha sido enseñado previamente (Toledo Castillo et al., 2022).
	Método comparativo y analógico	Radica en colocar dos o más fenómenos, uno al lado del otro, para establecer sus similitudes y diferencias, de manera que permita sacar conclusiones que definan un problema o que establezcan vías futuras para mejorar el conocimiento de algo (Toledo Castillo et al., 2022).
	Método de Indagación y búsqueda	Caracterizado por que mediante el mismo el estudiante encontrará soluciones a una situación problema mediante un

		proceso investigativo (Toledo Castillo et al., 2022).
Métodos en cuanto a la organización de la materia	Método basado en la lógica de la tradición o de la disciplina científica	Se refiere al método en los que la argumentación de lo estudiado se presenta ordenado en antecedente y consecuente, siguiendo una estructuración de aspectos que parte, ya sea de lo menos a lo más complejo o desde el origen a la actualidad o continuando una línea de costumbre de la ciencia o la materia estudiada (Toledo Castillo et al., 2022).
	Método basado en la psicología del alumno	Se concentra en la motivación del momento y se encamina de lo conocido por el estudiante a lo conocido por él (Toledo Castillo et al., 2022).
Métodos en cuanto a su relación con la realidad	Método simbólico o verbalista	Se utiliza cuando el lenguaje oral o escrito constituye en general el único medio de realizar la clase. Representa el método más empleado por la generalidad de los docentes, pero al mismo tiempo es el más criticado debido a que no tiene en cuenta los intereses de los estudiantes, dificulta la motivación y no tiene en cuenta otras formas de presentación de los contenidos (Toledo Castillo et al., 2022).
	Método intuitivo	Se utiliza cuando se desea tener una aproximación a la realidad actual del estudiante. Se fundamenta en el principio de intuición y no deniega de ninguna forma o actividad en la que existe el predominio de la actividad y

		experiencia de los estudiantes (Toledo Castillo et al., 2022).
Métodos en cuanto a las actividades externas del alumno	Método activo	Se da cuando el estudiante es colaborativo y el propio método y las actividades relacionadas con el mismo, motiva al estudiante. Siempre y cuando el docente sea el orientador del proceso de aprendizaje, las diferentes técnicas de enseñanza pueden ser convertidas a activas (Toledo Castillo et al., 2022).
Métodos en cuanto a la aceptación de lo enseñado.	Heurístico o Descubrimiento	Los estudiantes aprenden al descubrir conceptos y principios por sí mismos, en lugar de simplemente recibir información o instrucciones de un maestro o libro de texto (Rios Reyes, 2023).
Métodos en cuanto a la sistematización de conocimientos	Método especializado	Es aquel método donde las diferentes áreas, temas o asignaturas son asistidas de manera independiente una de otras (Toledo Castillo et al., 2022).
	Método globalizado.	Se caracteriza por realizaciones de clases que se realizan teniendo como base un determinado problema de interés, y estas se desenvuelven dando coberturas a un grupo de áreas, coberturas o temas específicos, en función de lo que requiera el asunto tratado (Toledo Castillo et al., 2022).

Métodos de enseñanza innovadoras	Método de gamificación	Uno de los métodos alternativos de enseñanza de hoy que consiste en el uso del juego en actividades educativas (en cualquier actividad educativa) (Education, 2024).
	Método de pensamiento de diseño (Design Thinking)	Propicia el desarrollo de competencias para la resolución de problemas a través del trabajo grupal de los estudiantes, de manera creativa (Toledo Castillo et al., 2022).
	Aula invertida (Flipped Classroom)	Consiste en estudiar la teoría en casa y en el aula la práctica. Es un método que tiene por objetivo optimizar el tiempo y dedicar las clases a trabajar proyectos y necesidades de los alumnos que surgen de la teoría estudiada en casa (Education, 2024).
	Método ABP (Aprendizaje Basado en Proyectos)	Se generan proyectos que busquen enseñarle al estudiante a través de la resolución de estos, la habilidad que debe adquirir (Aprendizaje, 2021).

Método de aprendizaje

El método de aprendizaje constituye también una secuencia de acciones, actividades u operaciones del que aprende que le permiten procesar e integrar la información o parte de ella que le “resulta útil o significativa, adquirir y asimilar el contenido de enseñanza con los consiguientes cambios en su sistema de conocimientos y en su conducta; atiende la estructura interna de la forma académica de organización pero se expresa dentro y fuera de esta” (Navarro & Samón, 2017).

De acuerdo a Pérez et al. (2013), al método de aprendizaje “se lo entiende también como un conjunto de procesos que pueden facilitar la adquisición, almacenamiento y utilización de la información”. Más específicamente, son procesos de toma de decisiones (conscientes e intencionales) en las que se articulan técnicas y estrategias mediante las cuales el alumno elige y recupera los conocimientos que necesita para satisfacer una determinada demanda o lograr un objetivo, dependiendo de las características de la situación educativa en que se produce la acción. Siendo actividades u operaciones mentales, su carácter intencionado demanda un plan de acción, así, como también de la planificación y organización del tiempo y forma de estudio del sujeto que aprende.

Clasificación de métodos de aprendizaje

Los métodos de aprendizaje son esenciales para el éxito académico, ya que al ser utilizados por el estudiante en la adquisición de conocimientos ayudan significativamente en el desarrollo de habilidades cognitivas. A continuación, se presenta la clasificación de los métodos de aprendizaje según (Aprendizaje, 2021), (Euroinnova, 2022), (Morales & Landa, 2004), (Murcia Valenzuela et al., 2017), (Panamericana, 2020), (Toledo Castillo et al., 2022):

Tabla 6.
Métodos de Aprendizaje

Métodos de Aprendizaje	
Método	Descripción / característica
Método Robinson	Denominado EPL2R, es el medio de aprendizaje bastante popular usado en diversos ámbitos educativos de todo el mundo. Se divide en 5 fases: Explorar, Preguntar, Leer, Recitar, Repasar.
Método PQRST	Método usado para ejercitar la memoria en modo de entrenamiento. Sus siglas en ingles corresponden a: Pre-visualizar, cuestionar, leer repasar y probar.
Método ABEP (Aprendizaje Basado en Escenarios Prácticos)	Consiste en recrear o simular una situación en modo de práctica, donde el estudiante debe resolver una serie de problemas.
Método IP3R	El estudiante primero generará una curiosidad sobre el tema que va a leer, para luego generar preguntas al respecto. Consiste en cinco pasos. Cada uno deriva del nombre del método: Indagar, Preguntar, Releer, Recitar y Repasar
Método 5-10	Busca afianzar el material y optimizar el tiempo, para crear un mejor ambiente de estudio. La principal finalidad, es tomar 5 pasos principales (planificar el

	horario, encontrar el lugar de estudio ideal, tener las herramientas de estudio a la mano y contar con el ambiente correcto para el aprendizaje.) para obtener una calificación de 10.
Método TBL (Thinking Based Learning)	Enseña a los alumnos a pensar, razonar, tomar decisiones y construir su propio aprendizaje a través del trabajo de los temas del currículo. Incentiva en el estudiante la capacidad para realizar un aprendizaje más consciente y profundo que transforma la manera en la que aborda la información recibida.
Método del Caso	Busca plantear una situación real donde el alumno pueda necesitar una serie de herramientas y habilidades. Para ello, se les plantean casos con todo un contexto y una situación simulada de la vida real.
Aprendizaje colaborativo o cooperativo	Mediante grupos heterogéneos se busca mejorar el aprendizaje a través del trabajo conjunto. Involucra activamente a los alumnos para que procesen y sinteticen información y conceptos, en lugar de atender mera memorización de hechos y cifras.
Aprendizaje basado en problemas	Barrows (1986), citado por (Morales & Landa, 2004), menciona que es un método de aprendizaje basado en el principio de usar problemas como punto de partida para la adquisición e integración de los nuevos conocimientos.
Aprendizaje basado en competencias	Los estudiantes trabajarán de manera individual, iniciando con la identificación de las destrezas, habilidades y actitudes o competencias específicas, de esa manera podrán alcanzar el dominio de esas competencias a su propio ritmo, generalmente con el apoyo de un tutor.
Método de aprendizaje holístico	El método de aprendizaje holístico le da la opción al estudiante de mirar el tema de estudio desde una perspectiva amplia, utilizando las imágenes, ilustraciones, analogías y anécdotas y la experiencia personal para lograr la comprensión, de un tema determinado, en este tipo de método de aprendizaje se refuerza más la etapa de experiencia concreta. Por lo

	tanto el aprendizaje se considera autónomo y personalizado.
Método de aprendizaje serial	El método de aprendizaje serialista implica un aprendizaje estructurado, no es dinámico y se encarga de seguir cada una de las etapas del aprendizaje al pie de la letra y en el orden que se establece, no prioriza una etapa sobre otra. En la interpretación de los datos obtenidos en la revisión del tema se da poco espacio para la imaginación y para establecer la experiencia como prioridad.

Nota. Extraído de (Aprendizaje, 2021), (Euroinnova, 2022), (Morales & Landa, 2004), (Murcia Valenzuela et al., 2017), (Panamericana, 2020), (Toledo Castillo et al., 2022).

2.2.3.2.2 Técnica

Proceso de trabajo o de producción que supone una manera de hacer las cosas desarrollada por el aprendizaje, pero no es un saber teórico o dones artístico particularmente desarrollados, sino como sinónimo de práctica que concurren a la aplicación de la ciencia propiamente dicha o conocimiento teórico a la actividad práctica (Roca Rosales & Zambrano Rodríguez, 2012).

Técnica de enseñanza

Según menciona (Cuello y Vizcaya, 2022), las técnicas de enseñanza son formas concretas o modos de proceder valiéndose de pasos o fases debidamente organizados, detallados y sistematizados para alcanzar determinados objetivos. Suelen formar parte de métodos más generales, que pueden a su vez contar con variantes.

Clasificación de técnicas de enseñanza

Las técnicas de enseñanza son componentes esenciales del proceso educativo, ya que permiten al profesorado seleccionarlas acorde a la necesidad de los temas que se pretende enseñar. A continuación se presenta su clasificación según (Stpatraci, 2023):

Tabla 7.
Técnicas de Enseñanza

Técnicas de enseñanza

Por el grado de participación del alumno	Técnicas activas	El alumno participa activamente en el proceso de aprendizaje, a través de actividades como la resolución de problemas.
De acuerdo con el canal sensorial	Técnicas visuales	El docente utiliza recursos visuales para los conocimientos, como imágenes, gráficos, mapas conceptuales o presentaciones.
	Técnicas táctiles	El alumno participa en actividades que implican el contacto físico con los objetos o materiales de aprendizaje.
Según el objetivo de la enseñanza	Técnicas para la adquisición de conocimientos	Se utilizan para información nueva al alumno.
	Técnicas para el desarrollo de habilidades	Se utilizan para al alumno en la realización de tareas específicas.
Técnicas de enseñanza específicas	Exposición oral	El docente transmite los conocimientos de manera oral, a través de explicaciones, lecturas o debates.
	Exposición audiovisual	El docente utiliza recursos audiovisuales para los conocimientos.

Nota. Extraído de (Stpatraci, 2023)

Técnica de aprendizaje

Las técnicas de aprendizaje son acciones, actividades y recursos didácticos utilizados por los estudiantes para comprender y asimilar un determinado conocimiento, valorar , destreza o habilidad. Por lo general, los docentes se valen de estas técnicas en las diferentes etapas de enseñanza con el objetivo de acercarles a los alumnos un determinado contenido. Estas técnicas suelen ser actividades individuales y dinámicas grupales que contribuyen al aprendizaje de los alumnos (Equipo editorial, 2022).

Clasificación de técnicas de aprendizaje

Las técnicas de aprendizaje son esenciales en el mejoramiento del rendimiento académico, desarrollando habilidades de estudio efectivas en el estudiante. A continuación se presenta la su clasificación según (Delgado & Palacios):

Tabla 8.
Técnicas de Aprendizaje

Técnicas de aprendizaje		
Aprendizaje asistido	Tiene como objetivo el desarrollo de habilidades, destrezas y desempeños estudiantiles, mediante clases presenciales u otro ambiente de aprendizaje	• Entrevista • Estudio dirigido • Exegética • Exposición didáctica • Expositiva Redescubrimiento • Resolución de problemas • Seminario
Aprendizaje colaborativo	Comprende el trabajo en grupos de estudiantes en interacción permanente con el profesor.	• Argumentación (interrogatorio) • Asamblea • Cuchicheo • Debate • Entrevista • Foro abierto • Lluvia de ideas • Mesa redonda
Aprendizaje aplicativo	Está orientado al desarrollo de experiencias de aplicación de los aprendizajes.	• Cuestionario • Encuesta Estudio de caso • Experiencia directa • Experimental • Observación • Redescubrimiento
Aprendizaje autónomo	Comprende el trabajo realizado por el estudiante, orientado al desarrollo de capacidades para el aprendizaje	• Analogía • Biográfica • Bosquejo Esquemático • Cadena de secuencias

	independiente e individual del estudiante.	• Cuadro sinóptico • Diagrama jerárquico • Estudio dirigido • Investigación bibliográfica • Mapa conceptual • Resumen

Nota. Extraído de (Delgado & Palacios).

2.2.3.2.3 Estrategia

La estrategia es un procedimiento para tomar decisiones en una determinada circunstancia. Es utilizada para alcanzar uno o varios objetivos previamente definidos. Simplificando, una estrategia es el camino a seguir para alcanzar ciertas metas (Westreicher, 2024).

Estrategias de enseñanza

Las estrategias de enseñanza se definen como los procedimientos o recursos utilizados por los docentes para lograr el aprendizaje en los alumnos. Cabe hacer mención que “el empleo de diversas estrategias de enseñanza permite a los docentes lograr un proceso de aprendizaje activo, participativo, de cooperación y vivencial” (Nolasco del Ángel, 2014).

Orellana (2008) citado por Acosta & García (2012) define “las estrategias de enseñanza como todas aquellas ayudas planteadas por el docente que se le proporcionan al estudiante para facilitar el procesamiento más profundo de la información”; es decir, procedimientos o recursos utilizados por quien enseña para promover aprendizajes significativos, funcionales y dialógicos.

Clasificación de estrategias de enseñanza

Ejecutar una correcta estrategia en la enseñanza, contribuye de forma significativa en la mejora del aprendizaje de los estudiantes. A continuación se presenta su clasificación según varios autores, tomado de (Toledo Castillo et al., 2022):

Tabla 9.
Estrategias de Enseñanza

Clasificación de Estrategias	
	Son utilizadas para preparar y prevenir al estudiante en relación a qué

Teniendo en cuenta el momento de uso y presentación	Estrategias preinstruccionales:	aprenderá y que método o técnica empleará para ello. Está referido activar los conocimientos y experiencias previas adecuados, permitiéndoles situarse en el tema del aprendizaje pertinente.
	Estrategias coinstruccionales	Constituyen la parte medular del proceso de enseñanza, es aquella en la que el estudiante tiene acceso a la información y donde el docente tiene que esforzarse en motivarlo y lograr el mantenimiento constante de su atención.
	Estrategias posinstruccionales	Se muestran posterior al contenido aprendido permitiendo al estudiante generar una visión sintética, integradora e incluso crítica del material. Constituye el momento en el que se disipan las dudas y se plantean maneras de ampliar los conocimientos que se han incorporado. En algunos casos le permiten valorar su propio aprendizaje.
Teniendo en cuenta la actividad del docente y el estudiante	De acción indirecta del docente	Está referida al planteamiento de situaciones para que el estudiante descubra y construya los contenidos. En este caso la función del docente es la de mediar entre el conocimiento y el estudiante y se realiza a través de una estrategia orientada al respecto.
	Estrategias para activar (o generar) conocimientos previos y para establecer expectativas adecuadas en los estudiantes	Son aquellas encaminadas a activar los conocimientos previos de los estudiantes o crearlos cuando no existan. En ellas se incluyen a aquellas que se concentran en el esclarecimiento de los propósitos educativos que el docente intenta lograr a la terminación del período o de la circunstancia educativa específica.

Conforme a los procesos cognitivos que activan	Estrategias para orientar la atención de los estudiantes	Se considera estas estrategias como aquellos recursos que el docente o emplea para mantener la atención de los estudiantes en una sesión, discurso o texto. Son actividades esenciales para desarrollar cualquier evento de aprendizaje.
	Estrategias para organizar la información que se ha de aprender	Este tipo de estrategias promueven un mayor contexto organizativo a la información nueva que será objeto de aprendizaje, al representar la misma de manera gráfica o escrita. Al mismo tiempo, ofrecen una adecuada organización a la información que se ha de aprender, mejorando su significatividad lógica y como resultado, elevando la probabilidad de lograr el aprendizaje significativo de los estudiantes.
	Estrategias para promover el enlace entre los conocimientos previos y la nueva información que se ha de aprender	Estas estrategias se destinan a la creación o potenciación en los estudiantes, de los enlaces apropiados entre los conocimientos previos y la información nueva que ha de aprenderse, certificando de esa forma una mayor significatividad de los aprendizajes logrados. Las estrategias usualmente utilizadas son los organizadores previos y las analogías, entre otras.
En función del tipo de agrupamiento	Enseñanza socializada	Esta estrategia tiene su origen en la concepción de que el docente y los estudiantes conforman un grupo de aprendizaje. En este grupo pueden generarse distintos tipos de comunicación, ya sea, comunicación directa, interacción diferenciada (interacción del docente con cada estudiante de forma individual),

		comunicación colectiva (participa el docente y todos los estudiantes) y la comunicación específica (su objetivo se centra en la realización de una tarea o trabajo determinado).
	Enseñanza individual	Esta estrategia está basada en la teoría que expresa que el aprendizaje debe realizarse por el propio estudiante, y que obtiene mejores resultados cuando el mismo realiza las tareas y actividades por sí mismo, de manera autónoma.

Nota. Extraído de (Toledo Castillo et al., 2022)

Estrategias de aprendizaje

"Las estrategias de aprendizaje pueden ser definidas como conductas o pensamientos que un aprendiz utiliza durante el aprendizaje con la intención de influir en su proceso de codificación" (Weinstein & Mayer, 1986)

Clasificación de estrategias de aprendizaje

Se aborda su clasificación desde diferentes enfoques. A continuación, se presenta la clasificación de las estrategias de aprendizaje, tomado de (Toledo Castillo et al., 2022):

Tabla 10.

Estrategias de Aprendizaje

Clasificación de Estrategias	Definición	Tipos de Estrategias
Estrategias Cognitivas	Integran lo nuevo con el conocimiento previo. Los procesos que intervienen son: atención, selección comprensión, elaboración, recuperación, aplicación.	• De repetición memorísticas (Estrategias de procesamiento superficial) • De selección / esencialización • De elaboración • De organización (Estrategias de procesamiento profundo)

Estrategias Metacognitivas	Control del conocimiento propio. Los procesos que intervienen son: planificación, supervisión y evaluación	• De planeación • De control • De evaluación (Con la persona, la tarea y estrategia)
Estrategias de apoyo	Son mecanismos o procedimientos que facilitan el estudio, sensibilizan hacia el aprendizaje y optimizar las tareas de estudio y aprendizaje.	• Referidas a las condiciones físicas y ambientales • Referidas a las condiciones psicológicas (afectivas, motivacionales y actitudinales)

Nota. Extraído de (Toledo Castillo et al., 2022).

Al revisar la literatura referente al tema tratado, se observa que existe una extensa variedad de estrategias de aprendizaje, se cita a (Meza, 2013) quién presenta su clasificación según diferentes autores:

Tabla 11.
Estrategias de Aprendizaje

Autor (es)	Año	Estrategias
Danserau	1978	• **Primarias:** Comprensión-retención, recuperación-utilización. • **De apoyo:** Elaboración y programación de metas, control de la atención, diagnóstico de la situación
Weinstein	1982	• **Rutinarias:** Habilidades básicas para el estudio y la memorización. • **Físicas:** Procesamiento enactivo (Bruner). • **Imaginativas:** Creación de imágenes mentales. • **De elaboración:** Relacionar conocimiento previo con información reciente.

Autor (es)	Año	Estrategias
		• **De agrupación:** Aplicación de esquemas clasificatorios
Stanger	1982	• De memoria: **De dominio específico** para la solución de problemas. **De creatividad:** Flexibilidad y fluidez
Jones	1983	Estrategias en el procesamiento de textos: • **De codificación:** Nombrar, repetir, identificar ideas clave. • **Generativas:** Parafrasear, visualizar, elaborar analogías, realizar inferencias, resumir. • **Constructivas:** Razonamiento (deductivo, inductivo, analógico), transformación, síntesis.
Shipman y Segal	1985	• De adquisición de conocimientos. • De solución de problemas. • Metacognitivas.
Weinstein y Mayer	1986	• De repetición (control cognitivo mínimo): Registro, copia o repetición. • De elaboración (control cognitivo bajo, ponen en relación conocimientos previo y nuevo): Notas, esquemas, resúmenes. • De organización (control cognitivo elevado): Categorización, ordenación, estructuración. • De regulación (control cognitivo muy elevado): Habilidades metacognitivas.
Derry y Murphy	1986	• De memoria.

Autor (es)	Año	Estrategias
		• De lectura-estudio de textos escolares específicos. • De solución de problemas en aritmética. • De apoyo afectivo.
Beltrán	1987	• Atencionales. • De codificación. • Metacognitivas. • Afectivas
Chadwick	1988	• Cognoscitivas: a. **De procesamiento**: Atencionales, físicas, de elaboración verbal, de elaboración de imágenes, comparación, inferencia, aplicación. b. **De ejecución:** De recuperación, de generalización, de identificación y representación de resolución de problemas. • Metacognitivas: Afectivas o de apoyo
Pozo	1989 1990	• **De repaso:** Subrayar, copiar. • **De elaboración:** Simple (palabras clave, imagen mental, rima, códigos loci) y compleja (analogías, elaboración de preguntas). • **De organización:** Categorizar, clasificar, jerarquizar
Monereo y Clariana	1993	• De repetición. • De gestión: a. **De elaboración** (subrayado, toma de apuntes) b. **De organización** (clasificación, comparación).

Autor (es)	Año	Estrategias
		c. **De control:** Planificación, supervisión, evaluación
Román y Gallego	1994	• **De adquisición:** Atencionales (exploración, fragmentación) y de repetición (repaso). • **De codificación:** Mnemotecnia (palabra clave, acrónimos, rimas, loci) y elaboración (simple –asociación intramaterial– y compleja –integración de la información que se va a aprender con los conocimientos previos–). • **De organización (agrupamientos):** Resúmenes, esquemas, mapas y diagramas de flujo (diagramas 'uve'). • **De recuperación:** De búsqueda de información y recuperación de respuestas (planificación de respuesta, redactar). • **De apoyo:** Metacognitivas (autoconocimiento y automanejo) y socioafectivas (afectivas, sociales y motivacionales).
Beltrán, Moraleda, García-Alcañiz, Calleja, Santiuste	1993 1996 1997	Combina la naturaleza de las estrategias (cognitivas, metacognitivas y de apoyo) con la función de las mismas en los procesos de aprendizaje (sensibilización, atención, adquisición, personalización y control, recuperación, transferencia y evaluación). • **De procesamiento:** Selección, organización, elaboración. • **De personalización del conocimiento**: Pensamiento crítico, recuperación, transfer. • **Metacognitivas:** Planificación, supervisión y evaluación.

Autor (es)	Año	Estrategias
Meza y Lazarte	2007	• **Generales** (relacionadas con procesos afectivos y cognitivos: de matización afectiva, de elaboración verbal, de elaboración conceptual, de elaboración de imágenes–, de ejecución –de recuperación, de generalización, de solución de problemas, de creatividad). • **Situacionales** (relacionadas con aprendizajes académicos: para abordar tareas académicas, para mejorar conductas de estudio, para trabajar en forma cooperativa, para tomar apuntes, para mejorar la capacidad auditiva, para la lectura comprensiva).

Nota. Extraído de (Meza, 2013)

2.2.3.3 Incorporación de las tics en la enseñanza de la matemática

La incorporación de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) en la enseñanza de las matemáticas marca una transformación significativa en la forma en que los conceptos matemáticos son presentados y comprendidos. Tradicionalmente, "la enseñanza de las matemáticas se ha basado en métodos convencionales como el uso de libros de texto y la resolución de problemas en la pizarra. Sin embargo, la llegada de las TIC ha permitido una evolución hacia un enfoque más interactivo y dinámico" (Calle et al., 2021).

Las TIC brindan a los docentes y estudiantes herramientas que facilitan una comprensión más profunda y significativa de los conceptos matemáticos. Por ejemplo, el uso de software educativo y aplicaciones especializadas permite a los alumnos visualizar conceptos abstractos de manera concreta. La geometría, a menudo "considerada una de las ramas más abstractas de las matemáticas, se puede explorar a través de simulaciones en 3D que permiten a los estudiantes manipular y examinar figuras desde diferentes ángulos. Esta visualización activa ayuda a los estudiantes a internalizar mejor los conceptos al interactuar con ellos de manera tangible" (Corrales, 2021).

Además, las plataformas digitales ofrecen recursos personalizados que se adaptan a las necesidades individuales de los estudiantes. Los sistemas de aprendizaje en línea pueden ajustar el nivel de dificultad de los ejercicios basándose en el rendimiento del alumno, proporcionando retroalimentación instantánea y permitiendo un aprendizaje autodirigido. Este tipo de personalización no solo optimiza el tiempo de estudio, sino que también "fomenta un entorno de aprendizaje inclusivo, donde cada estudiante puede avanzar a su propio ritmo sin sentirse rezagado en comparación con sus compañeros" (Torres, 2024).

El acceso a una variedad de recursos digitales también enriquece el proceso educativo. Las herramientas como los tutoriales en video, los simuladores interactivos y las plataformas de resolución de problemas permiten a los estudiantes explorar conceptos desde múltiples perspectivas. Este acceso diversificado facilita una comprensión más completa de los temas matemáticos, al mismo tiempo que fomenta una mayor autonomía en el aprendizaje.

Otra dimensión importante de la integración de las TIC en la enseñanza de las matemáticas es la colaboración. Las tecnologías permiten que los estudiantes trabajen juntos en proyectos matemáticos a través de plataformas en línea, independientemente de su ubicación física. Este "enfoque colaborativo no solo mejora las habilidades sociales y de comunicación de los alumnos, sino que también promueve un aprendizaje más enriquecedor a través del intercambio de ideas y estrategias" (Breda, 2020).

Es claro definir que la incorporación de las TIC en la enseñanza de las matemáticas no solo moderniza el enfoque pedagógico, sino que también ofrece nuevas oportunidades para una comprensión más profunda y personalizada de los conceptos matemáticos. Al permitir una mayor interactividad, personalización y colaboración, las TIC están configurando un nuevo paradigma en la educación matemática que busca hacer del aprendizaje una experiencia más efectiva y atractiva para todos los estudiantes.

2.2.3.4 La tecnología como recurso de enseñanza y de aprendizaje en la geometría analítica: sección cónicas

La integración de las Tecnologías de Información y Comunicación promueven el trabajo activo, colaborativo e interactivo de educadores y educandos, todo esto con el propósito de alcanzar objetivos académicos, a partir, de esta combinación "surgen escenarios críticos reflexivos donde el docente y estudiante fortalecen el proceso enseñanza y aprendizaje" (Vargas, 2020).

Calcetero (2023) menciona en su publicación titulada "El futuro de la educación: adoptar la tecnología para mejorar la enseñanza", en referencia a los mencionado:

> "Nuestra vida cotidiana ahora depende en gran medida de la tecnología, e incorporarla al aula es fundamental para garantizar que los estudiantes estén preparados para el futuro. Los educadores pueden mejorar sus estrategias de enseñanza, involucrar a los estudiantes y ofrecer experiencias de aprendizaje personalizadas mediante el uso de la tecnología. Proporciona una amplia gama de herramientas y recursos que se adaptan a diversos estilos de aprendizaje, fomentando el pensamiento crítico y la participación activa"

La integración de la tecnología en la forma de enseñar, puede transformar el aprendizaje, haciendo el proceso educativo más dinámico e interactivo, por ende significativo para los estudiantes. Existen diversos softwares educativos que pueden ser implementados, con el fin de enriquecer la experiencia de enseñar y promover una comprensión profunda del tema de estudio.

2.2.4 Resultados de aprendizaje que aportan al perfil de egreso de la carrera de pedagogía de las ciencias experimentales: matemáticas y la física

A continuación se presentan los resultados que se espera que obtengan los estudiantes al culminar de forma efectiva la cátedra de geometría analítica en el 3er semestre de la carrera:

- El estudiante construye ecuaciones de circunferencias que satisfacen condiciones dadas, a partir de la utilización del GeoGebra, que le permitan desarrollar habilidades del pensamiento matemático.
- Emplea las formas de la ecuación de la parábola, elipse e hipérbola, a través de la resolución de problemas, valorando su aplicación a situaciones reales.

CAPÍTULO III

METODOLOGIA

3.1 Enfoque de la investigación

De acuerdo a Muñoz (2024), “la investigación con enfoque mixto es aquella en donde se combinan elementos de investigación cuantitativa y cualitativa, con el fin de obtener una comprensión más integral y profunda de un fenómeno”.

La presente investigación es de enfoque mixto, en donde el método cuantitativo está presente en el uso de la estadística descriptiva para el análisis de los datos y la interpretación de los resultados obtenidos y el método cualitativo se presenta en el análisis y descripción de las diferentes dificultades encontradas tanto en la enseñanza como en el aprendizaje de la geometría analítica: sección cónicas.

3.2 Diseño de Investigación

Según Hernández et al (2010) “el diseño de investigación mixto explicativo secuencial (DEXPLIS), se caracteriza por una primera etapa en la cual se recaban y analizan datos cuantitativos”, seguida de otra donde se recogen y evalúan datos cualitativos. La mezcla mixta ocurre cuanto los resultados cuantitativos iniciales informan o permiten la producción de los datos cualitativos.

De ahí que, la presente investigación se desarrolló a tavés de la aplicación del diseño mixto explicativo secuencial (DEXPLIS) ya que se se desarrolla en dos fases consecutivas. Primero se realiza la fase cuantitativa, en donde se producen y se analizan los datos obtenidos a través de una encuesta. Luego, se desarrolla la fase cualitativa, que analiza y describe los resultados obtenidos en la entrevista a profundidad fruto de la información recabada en el análisis cuantitativo.

3.3 Tipo de investigación

3.3.1 Según el nivel de profundidad

De acuerdo a Hernández et al (2010) el nivel de investigación descriptiva busca especificar propiedades, características y rasgos importantes de cualquier fenómeno que se analice.

Por lo tanto, el nivel de investigación fue descriptivo - própositivo, descriptivo porque permitió especificar características y rasgos de la población objeto de investigación; y propositivo porque una vez identificado el problema, se proponen estrategias metodológicas para mejorar la enseñanza y el aprendizaje de la geometría analítica: sección cónicas.

3.3.2 Según el lugar

La investigación es de campo, porque se realizó en el lugar de los hechos, esto es en la Universidad Nacional de Chimborazo, Facultad de Ciencias de la Educación, Humanas y Tecnologías, Carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales de la Matemática y la Física.

De acuerdo a (Arias, 2012), la investigación de campo consiste en la producción de datos proporcionados directamente de los sujetos investigados, o de la realidad donde ocurren los hechos, sin manipular variable alguna, es decir, el investigador obtiene la información sin alterar las condiciones existentes.

3.3.3 Según el tiempo

Según menciona Vásquez (2023) #la investigación transversal es un método de investigación que ayuda a recoger y analizar datos en un momento determinado#.

La investigación realizada es transversal, puesto que se realizó en un tiempo determinado, esto es en el periodo académico 2023-2S.

3.4 Técnicas e Instrumentos de Producción de Datos

3.4.1 Técnica

Encuesta, se aplicó a 12 estudiantes de 3er semestre de la Carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales de la Matemática y la Física a través de la cual se identificó las dificultades de aprendizaje que los estudiantes presentan en la asignatura de geometría analítica: sección cónicas. Entrevista en Profundidad, se aplicó a la profesora de la Carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales de la Matemática y la Física que imparte la cátedra de geometría analítica, con la finalidad de identificar las dificultades que se le presentan al momento de enseñar la sección cónicas dentro de la asignatura de geometría analítica.

3.4.2 Instrumento

El cuestionario de base estructurada, permitió identificar las dificultades que presentan los estudiantes durante el aprendizaje de la geometría analítica: sección cónicas.

La formulación de pautas constituye el instrumento de la técnica de la entrevista en profundidad, permitió la identificación de las dificultades que la profesora percibe al momento de enseñar la sección cónicas dentro de la asignatura de geometría analítica.

3.5 Población de estudio y tamaño de muestra

3.5.1 Población

La población de estudio estuvo compuesta por 12 estudiantes de 3er semestre de la Carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales de la Matemática y la Física, y por un profesor que han venido impartiendo la cátedra de geometría analítica.

Tabla 12.
Población

POBLACIÓN	FRECUENCIA	PORCENTAJE
Estudiantes de 3er semestre de la Carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales de la Matemática y la Física	12	100%
TOTAL	**12**	**100%**

Nota: Datos proporcionados por la Secretaría de la Carrera de Pedagogía de la Ciencias Experimentales de la Matemática y la Física.

Tabla 13.
Población

POBLACIÓN	FRECUENCIA	PORCENTAJE
Docentes de la asignatura de geometría analítica de la Carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales de la Matemática y la Física	1	100%
TOTAL	**1**	**100%**

Nota: Datos proporcionados por la Secretaría de la Carrera de Pedagogía de la Ciencias Experimentales de la Matemática y la Física.

3.5.2 Muestra

La muestra es intencional, no probabilística, por ser la población pequeña se trabajó con toda la población.

3.6 Métodos de análisis, y procesamiento de datos.

3.6.1 Método de análisis

Inductivo – deductivo: Permitió analizar la información obtenida en dos vías, de lo particular a lo general y de lo general a lo particular, facilitando de esta manera la comprensión de las dificultades de la enseñanza y del aprendizaje de geometría analítica: sección cónicas.

Analítico – Sintético: Permitió analizar las causas de las falencias presentadas al momento de enseñar y de aprender la sección cónicas, dentro de la asignatura de geometría analítica, y sobre la base de aquello seleccionar estrategias metodologías apropiadas para su enseñanza y para su aprendizaje.

3.6.2 Procesamiento de datos

Se utilizó el software Rstudio para representar los datos obtenidos de la encuesta, llegando a determinar mediante frecuencias y porcentajes, las dificultades que presentan los profesores y los estudiantes al momento de enseñar y de aprender la sección cónicas dentro de la asignatura de geometría analítica.

Mientras que los datos obtenidos en la Entrevista en Profundidad fueron procesados mediante el análisis temático, mismo que permitió identificar las dificultades que presentan los profesores al momento de enseñar la sección cónicas, dentro de la asignatura de geometría analítica.

3.7 Validación del instrumento

De acuerdo a Cueva et al. (2023), en las investigaciones con enfoque mixto, los "métodos cuantitativos y cualitativos se complementan entre sí, los primeros se centran en la medición y el análisis de datos numéricos, y los últimos se enfocan en la comprensión en profundidad de los fenómenos sociales estudiados".

Los métodos cuantitativos, al tener un diseño de investigación estructurado y riguroso se obtienen a través de instrumentos de recolección que son diseñados para medir variables específicas de forma objetiva y precisa. Se utilizan herramientas como cuestionarios, escalas de calificación, observaciones sistematicas y registro de datos para su aplicación.

En nuestro caso, el primer instrumento utilizado de carácter cuantitativo y validado por tres docentes expertos en el área de matemática de la Universidad Nacional de Chimborazo, fue el cuestionario de base estructurada. Para llevar adelante dicho proceso se presentó una rúbrica de evaluación, en donde, se consideraron dos criterios: adecuación y pertinencia, obteniéndose una validación final de satisfactorio, la misma que se encuentra en el apartado de anexos.

Tabla 14.
Validación del instrumento cuantitativo

Experto 1	Experto 2	Experto 3

Excelente	Excelente	Satisfactorio
TOTAL		**Satisfactorio**

Por otra parte, los métodos cualitativos al basarse en la producción y en el análisis de datos no numéricos sobre la base de entrevistas, observaciones participantes, documentos y narrativas proporcionan la comprensión profunda y detallada de los contextos sociales, “las interacciones y las experiencias de las personas, razón por la cual, permiten explorar y descubrir nuevos conocimientos y nuevas perspectivas enriquecedoras sobre temas complejos y subjetivos” (Niño, 2011).

En tal virtud, las pautas que constituyen el instrumento utilizado en el método cualitativo fue validado de igual manera por tres docentes expertos en el área de matemática de la Universidad Nacional de Chimborazo. Para lograr dicho porpósito se presentó una rúbrica de evaluación, en donde se consideraron dos criterios: adecuación y pertinencia, obteniéndose una validación final de satisfactorio, la misma que se encuentra en el apartado de anexos.

Tabla 15.

Validación del instrumento cualitativo

Experto 1	**Experto 2**	**Experto 3**
Excelente	Excelente	Satisfactorio
TOTAL		**Satisfactorio**

CAPÍTULO IV

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

4.1 Análisis e Interpretación

4.1.1 Encuesta

Encuesta aplicada a los estudiantes de tercer semestre en la carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales de la Matemática y la Física.

Objetivo: Diagnosticar las dificultades de aprendizaje que presentan los estudiantes en el estudio de la geometría analítica: sección cónicas.

Pregunta 1: En las clases que imparte el docente, durante la enseñanza de las cónicas ¿A qué tipo de dominio da énfasis?

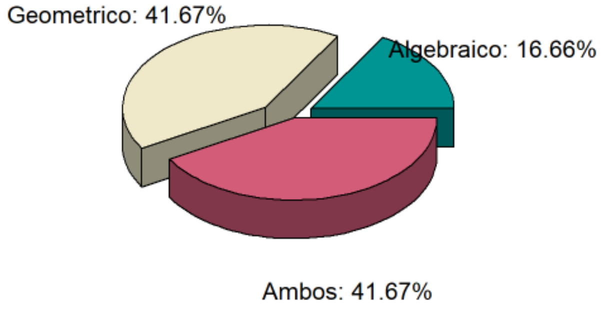
Tabla 16.

Resultados - Pregunta 1

	FRECUENCIA	PORCENTAJE
Algebraico	2	16,66%
Geométrico	5	41,67%
Ambos	5	41,67%
TOTAL	12	100%

Figura 24.

Resultados – Pregunta 1



Análisis e Interpretación: Los resultados de la encuesta aplicada muestran que el 16,66% (2 estudiantes), consideran que el docente de la asignatura le da mayor énfasis al dominio algebraico, el 41,6% (5 estudiantes) al dominio geométrico, por último, el 41,6% (5 estudiantes) a ambos dominios.

Esto demuestra que una parte de los estudiantes reconocen que el docente incluye los dominios tanto algebraico como geométrico de igual forma en el proceso de enseñanza, importante para los estudiantes, quienes obtienen una comprensión integral, ya que, son capaces de visualizar las formas y entender las relaciones algebraicas de cada cónica.

Otra parte considera que se da mayor énfasis al dominio geométrico sobre el algebraico, entendiéndose por ello, que los estudiantes son capaces de reconocer a simple vista el tipo de cónica, sus elementos y propiedades.

Una fracción reducida de estudiantes consideran que se da mayor énfasis al dominio algebraico sobre el geométrico, por lo cual, se entiende que comprenden y aplican principios matemáticos generales que definen propiedades y características de las cónicas.

Pregunta 2: ¿Cuáles son los tipos de ecuaciones que puede reconocer con facilidad después de la clase cónica Circunferencia?

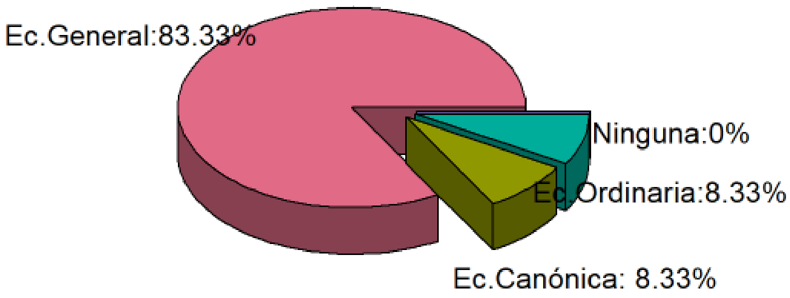
Tabla 17.

Resultados - Pregunta 2

	FRECUENCIA	PORCENTAJE
Ecuación General de la Circunferencia	10	83,33%
Ecuación Canónica de la Circunferencia	1	8,33%
Ecuación Ordinaria de la Circunferencia	1	8,33%
Ninguna	0	0%
TOTAL	12	100%

Figura 25.

Resultados – Pregunta 2



Análisis e Interpretación: Los resultados de la encuesta aplicada muestran que el 83,33% (10 estudiantes) pueden reconocer con facilidad la Ecuación General de la Circunferencia, mientras que el 8,33% (1 estudiante) reconocen la Ecuación Canónica, y el 8,33% (1 estudiante) reconocen la Ecuación Ordinaria, por último, se muestra que el 0% (ningún estudiante) no es capaz de reconocer alguna ecuación de la Cónica: circunferencia.

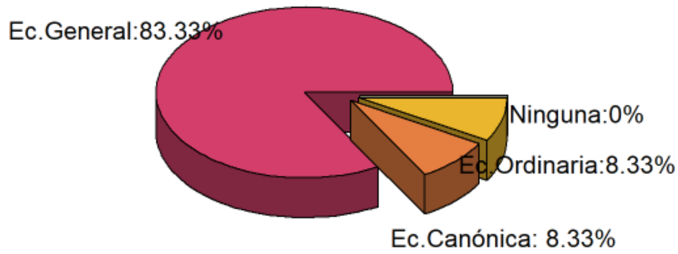
Esto demuestra que la mayoría de los estudiantes conocen una de las ecuaciones que son esenciales en el estudio de la Circunferencia, cabe recalcar la importancia de otras expresiones algebraicas, que también son necesarias en el desarrollo del aprendizaje específicamente en la cónica descrita.

Pregunta 3: ¿Cuáles son los tipos de ecuaciones que puede reconocer con facilidad después de la clase cónica Parábola?

Tabla 18.
Resultados - Pregunta 3

	FRECUENCIA	PORCENTAJE
Ecuación General de la Parábola	10	83,33%
Ecuación Canónica de la Parábola	1	8,33%
Ecuación Ordinaria de la Parábola	1	8,33%
Ninguna	0	0%
TOTAL	**12**	**100%**

Figura 26.
Resultados – Pregunta 3



Análisis e Interpretación: Los resultados de la encuesta aplicada muestran que el 83,33% (10 estudiantes) pueden reconocer con facilidad la Ecuación General de la Parábola, mientras que el 8,33% (1 estudiante) reconocen la Ecuación Canónica, y el 8,33% (1 estudiante) reconocen la Ecuación Ordinaria, por último, se muestra que el 0% (ningún estudiante) no es capaz de reconocer alguna ecuación de la Cónica: parábola.

Esto demuestra que la mayoría de los estudiantes conocen una de las ecuaciones que son esenciales en el estudio de la Parábola, cabe recalcar la importancia de otras expresiones algebraicas, que también son necesarias en el desarrollo del aprendizaje específicamente en la cónica descrita.

Pregunta 4: ¿Cuáles son los tipos de ecuaciones que puede reconocer con facilidad después de la clase cónica Elipse?

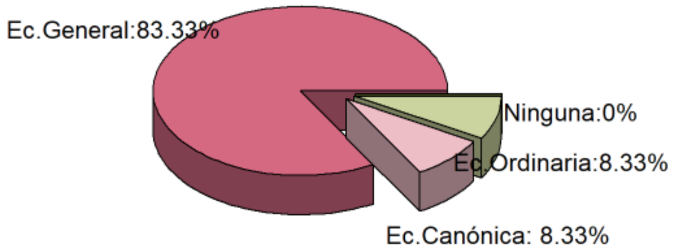
Tabla 19.

Resultados - Pregunta 4

	FRECUENCIA	PORCENTAJE
Ecuación General de la Elipse	10	83,33%
Ecuación Canónica de la Elipse	1	8,33%
Ecuación Ordinaria de la Elipse	1	8,33%
Ninguna	0	0%
TOTAL	**12**	**100%**

Figura 27.

Resultados – Pregunta 4



Análisis e Interpretación: Los resultados de la encuesta aplicada muestran que el 83,33% (10 estudiantes) pueden reconocer con facilidad la Ecuación General de la Elipse, mientras que el 8,33% (1 estudiante) reconocen la Ecuación Canónica, y el 8,33% (1 estudiante) reconocen la Ecuación Ordinaria, por último, se muestra que el 0% (ningún estudiante) no es capaz de reconocer alguna ecuación de la Cónica: elipse.

Esto demuestra que la mayoría de los estudiantes conocen una de las ecuaciones que son esenciales en el estudio de la Elipse, cabe recalcar la importancia de otras expresiones algebraicas, que también son necesarias en el desarrollo del aprendizaje específicamente en la cónica descrita.

Pregunta 5: ¿Cuáles son los tipos de ecuaciones que puede reconocer con facilidad después de la clase cónica Hipérbola?

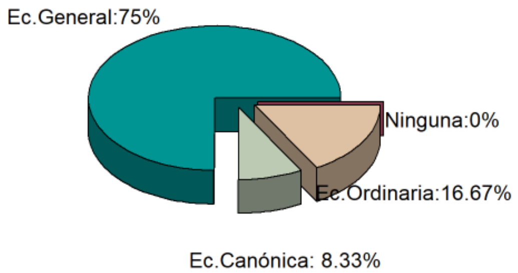
Tabla 20.

Resultados - Pregunta 5

	FRECUENCIA	PORCENTAJE
Ecuación General de la Hipérbola	9	75,00%
Ecuación Canónica de la Hipérbola	1	8,33%
Ecuación Ordinaria de la Hipérbola	2	16,67%
Ninguna	0	0%
TOTAL	**12**	**100%**

Figura 28.

Resultados – Pregunta 5



Análisis e Interpretación: Los resultados de la encuesta aplicada muestran que el 83,33% (10 estudiantes) pueden reconocer con facilidad la Ecuación General de la Hipérbola, mientras que el 8,33% (1 estudiante) reconocen la Ecuación Canónica, y el 8,33% (1 estudiante) reconocen la Ecuación Ordinaria, por último, se muestra que el 0% (ningún estudiante) no es capaz de reconocer alguna ecuación de la Cónica: hipérbola.

Esto demuestra que la mayoría de los estudiantes conocen una de las ecuaciones que son esenciales en el estudio de la Hipérbola, cabe recalcar la importancia de otras expresiones algebraicas, que también son necesarias en el desarrollo del aprendizaje específicamente en la cónica descrita.

Pregunta 6: En la enseñanza de la geometría analítica: sección cónicas, el docente generalmente hace uso de:

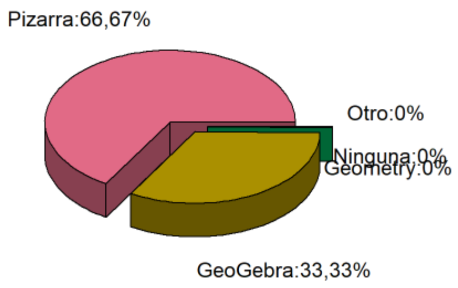
Tabla 21.

Resultados - Pregunta 6

	FRECUENCIA	PORCENTAJE
La pizarra	8	66,67%
Del programa GeoGebra	4	33,33%
Del programa Geometry Mathematics	0	0%
Ninguna	0	0%
Otro	0	0%
TOTAL	**12**	**100%**

Figura 29.

Resultados – Pregunta 6



Análisis e Interpretación: Los resultados de la encuesta aplicada muestran que el 66,67% (8 estudiantes) mencionan que durante el proceso de enseñanza de la sección cónicas, la docente hace uso de la pizarra, el 33,33% (4 estudiantes) mencionan que hace uso del software GeoGebra, por último, se muestra que el 0% (ningún estudiante) menciona que se hace uso de Geometry Mathematics, ningún u otro insumo educativo en el proceso de enseñanza de cónicas.

Esto demuestra que una gran parte de estudiantes consideran que aún existe la presencia de la enseñanza tradicional, en donde, el docente se enfoca en proporcionar una comprensión teórica y gráfica, seguida de la resolución de ejercicios y problemas de aplicación.

Por otra parte, existen estudiantes que consideran que en el aula de clases, la enseñanza de las cónicas es fortalecida con el uso de GeoGebra, siendo una herramienta tecnológica muy útil, ya que, permite la construcción, visualización e interactividad. Resulta necesario recalcar que el único programa educativo que se menciona que se utiliza durante la enseñanza de la geometría analítica: sección cónicas.

Pregunta 7: El tiempo que se dedica para la enseñanza de la geometría analítica: sección cónicas durante el periodo académico, considera usted que:

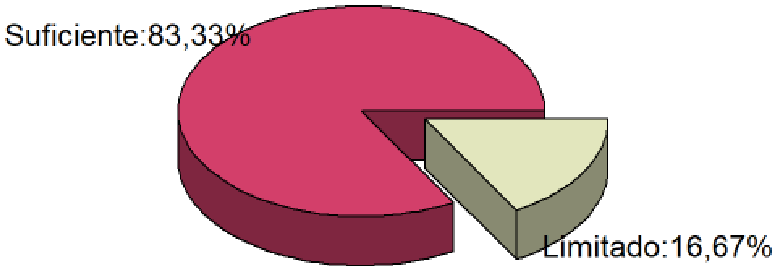
Tabla 22.

Resultados - Pregunta 7

	FRECUENCIA	PORCENTAJE
Es suficiente para su aprendizaje	10	83,33%
Es limitado para su aprendizaje	2	16,67%
TOTAL	**12**	**100%**

Figura 30.

Resultados – Pregunta 7



Análisis e Interpretación: Los resultados de la encuesta aplicada muestran que el 83,33% (10 estudiantes) consideran que es suficiente el tiempo destinado para la enseñanza de la geometría analítica: Sección Cónicas, mientras que, el 16,67% (2 estudiantes) consideran que el tiempo es limitado.

Esto demuestra que una gran parte de los estudiantes consideran que el tiempo destinado para la enseñanza de la sección cónicas es suficiente, lo cual hace referencia que se están cumpliendo con los objetivos planteados al inicio del período académico. Del mismo modo, los estudiantes se encuentran en la facultad de reconocer de manera inmediata la forma gráfica y algebraica de cualquier cónica.

Pregunta 8: Durante la enseñanza de la geometría analítica: sección cónicas ¿Qué tipo de aprendizaje promueve el docente?

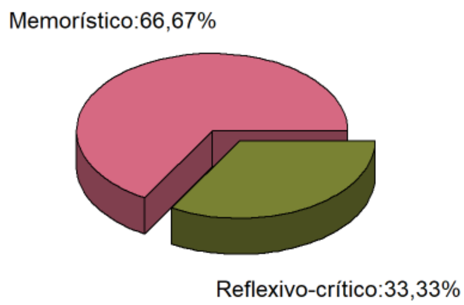
Tabla 23.

Resultados - Pregunta 8

	FRECUENCIA	PORCENTAJE
Aprendizaje memorístico	8	66,67%
Aprendizaje reflexivo-crítico	4	33,33%
TOTAL	**12**	**100%**

Figura 31.

Resultados – Pregunta 8



Análisis e Interpretación: Los resultados de la encuesta aplicada muestran que el 66,67% (8 estudiantes) consideran que la docente promueve un aprendizaje memorístico, el 33,33% (4 estudiantes) un aprendizaje reflexivo-crítico.

Esto demuestra que, al promoverse un aprendizaje memorístico, gran parte de los estudiantes se centran en la repetición y retención de información, mientras que otra parte priorizan la comprensión profunda, el análisis crítico y la aplicación de conocimiento en ejercicios de aplicación de las cónicas.

4.1.2 Entrevista

Entrevista aplicada al docente encargado de la cátedra geometría analítica en la carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales: Matemáticas y la Física

Objetivo: Identificar las dificultades de enseñanza que presentan los profesores en el estudio de la geometría analítica: sección cónicas.

Pregunta 1: ¿Qué estrategia metodológica utiliza usted durante el desarrollo del proceso de enseñanza y de aprendizaje de la geometría analítica: sección cónicas?

Análisis e Interpretación: En la entrevista aplicada, la docente menciona que las diferentes estrategias que utiliza en el desarrollo del proceso de enseñanza y de aprendizaje son: Aprendizaje Basada en Proyectos (ABP), Aula Invertida, cooperativa, colaborativa.

Esto demuestra que, aunque se presentan diferentes estrategias durante el proceso de enseñanza y aprendizaje, todas ellas tienen similitudes en promover la participación activa y la colaboración entre los estudiantes, también difieren en relación a los roles que desempeñan los docentes y los estudiantes.

Pregunta 2: ¿Con que frecuencia hace uso de herramientas tecnológicas durante la enseñanza de la geometría analítica: sección cónicas?

Análisis e Interpretación: En la entrevista aplicada, la docente menciona que básicamente trabaja con softwares interactivos como GeoGebra y plataformas de aprendizaje como Khan Academy y Kahoot, siendo beneficioso en los estudiantes, ya que las herramientas tecnológicas educativas ayudan en la comprensión de conceptos, gráficas, curvas y elementos de las cónicas.

Geogebra, es un software o aplicación, herramienta educativa que ayuda en la construcción geométrica de elementos gráficos, como lo son las diferentes secciones cónicas, las cuales se obtienen de la intersección entre un plano y un cono. Al ser un software interactivo, facilita al docente la enseñanza con la ayuda de tecnologías educativas.

Khan Academy, es una plataforma que ofrece una gama de recursos y materiales interactivos que ayudan en el proceso de aprendizaje de un tema en específico, proporciona videos, ejercicios de razonamiento y material teórico que son útiles para comprender conceptos relacionados a las cónicas.

Kahoot es una plataforma de aprendizaje basada en juegos, diseñada principalmente para realizar cuestionarios y actividades de evaluación formativa. Sin embrago, es necesario recalcar que esta herramienta educativa puede adaptarse creativamente para enseñar conceptos, elementos, gráficas de las cónicas de manera interactiva.

Pregunta 3: Durante el proceso de enseñanza de la geometría analítica: sección cónicas, ¿El alumno muestra interés por aprender?

Análisis e Interpretación: En la entrevista aplicada, la docente menciona que los estudiantes si muestran interés interés por aprender y desarrollar habilidades con: realizar demostraciones, resolver ejercicios partiendo de la construcción gráfica, razonamiento y la resolución de ejercicios.

Esto demuestra que los estudiantes se encuentran comprometidos con el aprendizaje, cooperación y participación, en donde poner en práctica y aplicar los conocimientos adquiridos son fundamentales para culminar de manera eficaz el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Pregunta 4: Desde su experiencia durante la enseñanza de geometría analítica: sección cónicas, ¿Cuáles son las dificultades más comunes que presentan los estudiantes al momento de aprender?

Análisis e Interpretación: En la entrevista aplicada, la docente menciona que las dificultades más comunes que presentan los estudiantes, es en la parte algebraica, trigonométrica y Gráfica.

Esto demuestra que es necesario llenar los vacíos que tienen los estudiantes en las diferentes áreas de estudio, las cuales son parte importante en el estudio de las cónicas.

Para ayudar en las dificultades que se presenta en relación a la parte algebraica es importante identificar y revisar los conceptos fundamentales, utilizar ejemplos de la vida cotidiana, practicar constantemente la resolución de problemas tanto dentro como fuera del aula de clase.

Para ayudar en las dificultades que se presenta en relación a la parte trigonométrica, es necesario introducir y comprender los conceptos trigonométricos de forma gradual, utilizar herramientas visuales, practicar la resolución de ejercicios aplicados en referencia a la trigonometría.

Para ayudar en las dificultades que se presenta en relación al dibujo, es importante establecer una relación entre ecuaciones algebraicas y la gráfica, destacando la comprensión conjunta la una a la otra.

Pregunta 5: ¿De qué manera ayuda a los estudiantes a superar las diferentes dificultades que se presentan en el proceso de aprendizaje de la geometría analítica: sección cónicas?

Análisis e Interpretación: En la entrevista aplicada, la docente menciona de manera verbal lo siguiente:

Mi frase es: "quién piensa que es difícil, pierde", de eso se trata la matemática y la vida en general. Si usted piensa que eso es difícil, usted ya perdió, porque la mente emocional controla la mente cognitiva, de ahí radica la importancia de enseñar la matemática desde la emoción. Cambiar la manera de pensar del estudiante, la matemática requiere de persistencia, conocimiento, dedicación, y orden, ya que, todo conjuga, si no hay orden, no hay aprendizaje.

Se destaca la importancia de propiciar la enseñanza de las cónicas desde las emociones, lo que implica la conexión de conceptos matemáticos con las emociones y experiencias del estudiante, ayudando a identificar las debilidades y fortalezas propias de cada uno.

Del mismo modo, se resalta la necesidad de que el estudiante se mantenga enfocado y organizado en el proceso de aprendizaje, ya que el orden es fundamental para facilitar la comprensión y retención de los conceptos matemáticos.

Pregunta 6: ¿El tiempo asignado en el período académico es apropiado para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría analítica: sección cónicas? ¿Por qué?

Análisis e Interpretación: En la entrevista aplicada, la docente menciona que el tiempo que se ha destinado para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría analítica: sección cónicas, son 6 (SEIS) horas, la cual es prudente, sin embrago es necesario coordinar las semanas con el fin de no afectar los tiempos para su enseñanza.

Esto destaca la importancia de coordinar las semanas de clase en referencia a las diferentes situaciones de carácter académico, cultural, social y festivo para que no afecte directamente a las horas de clase que están destinadas al proceso de enseñanza y aprendizaje.

4.2 Discusión de resultados

4.2.1 Encuesta

En los resultados obtenidos se muestran aspectos interesantes con respecto a la perpercicón que presentan los estudiantes en referencia al proceso de enseñanza y aprendizaje de la sección cónicas. Se observa un balance relativamente efectivo entre los aspectos algebraicos y geométricos de las cónicas, aunque con una ligera inclinación hacia el enfoque geométrico. Es importante recordar que incluir tanto el dominio geométrico como el algebraico en la enseñanza de las secciones cónicas ofrece una serie de beneficios, que permite al estudiante obtener una comprensión más profunda y versátil de las cónicas y su relevancia en diferentes áreas de estudio y aplicaciones prácticas

En lo que respecta al reconocimiento de ecuaciones por tipo de cónica, los resultados reflejan que existe una clara preferencia por la Ecuación General de cada cónica, lo que muestra un énfasis significativo en la enseñanza de la Ecuación General o la facilidad de los estudiantes al comprenderla y recordarla.

En lo que tiene que ver con con la utilización de los métodos, se observa una combinación entre los métodos de enseñanza tradicional y moderno, dicha distribución sugiere el uso de herramientas tecnológicas y el predominio de métodos tradicionales. El aprendizaje de las secciones cónicas desde la enseñanza tradicional, ofrece ventajas en la comprensión teórica y práctica, ya que, los docentes acompañan paso a paso en el desarrollo de ejercicios, ayudando a los estudiantes a comprender el proceso detrás de las ecuaciones y a conectar la teoría con la práctica. La ayuda de la herramienta educativa GeoGebra en la enseñanza de la sección cónicas ayuda de manera significativa, ya que, proporciona un aprendizaje interactivo, visual y práctico, permite a los estudiantes explorar la parte teórica de manera activa y experimental, mejorando su comprensión en el estudio del tema.

En cuanto al tiempo que se dedica a la enseñanza de la sección cónicas, la mayoría de los estudiantes consideran que es suficiente para su aprendizaje, mientras que otra parte cree que el tiempo es limitado. Sin embargo, es importante analizar el tipo de aprendizaje que los estudiantes perciben que se promueve, siendo el aprendizaje memorístico, en donde, el estudiante se centra en la repetición y la retención superficial de la información; por otra parte, el aprendizaje reflexivo-crítico, prioriza la comprensión profunda, aprendizaje reflexivo, análisis crítico y aplicación práctica del conocimiento

Finalmente, aunque la mayoría de los estudiantes consideran que el tiempo dedicado al estudio de la sección cónicas es adecuado, es importante implementar evaluaciones formativas que ayuden a corroborar dicha afirmación.

4.2.2 Entrevista

En los resultados obtenidos se muestran las estrategias metodológicas que la docente emplea en el desarrollo de su clase, abarcando una variedad de enfoques, en donde se incluye el Aprendizaje Basado en Proyectos (ABP), Aula Invertida, métodos cooperativos y colaborativos. Esta diversidad de estrategias sugiere un ambiente pedagógico flexible y centrado en el estudiante, que busca promover un aprendizaje activo, la autonomía y participación conjunta de quienes forman parte del proceso de aprendizaje, desarrollando habilidades y destrezas como la comunicación, trabajo en equipo y resolución de problemas.

Regularmente, la docente, hace uso de softwars de aprendizaje interactivo como GeoGebra y plataformas de aprendizaje como Kahoot y Khan Academy. Es importante recordar que el uso de herramientas tecnológicas en la enseñanza de las cónicas permite a los estudiantes experimentar y manipular las representaciones gráficas de cada cónica, por lo que el acceso a los diferentes recursos digitales facilita la comprensión de conceptos y la resolución de ejercicios.

Se observa gran intéres por parte de los estudiantes en aprender el contenido de las cónicas, mostrándose en su disposición por realizar demostraciones, resolver ejercicios a partir de construcciones gráficas y el razonamiento, siendo importante el compromiso estudiantil para el éxito del proceso de enseñanza y aprendizaje, ya que indica una participación activa y la disposición para aplicar los conocimientos adquiridos.

En la entrevista se observan también desafios que son significativos en el aprendizaje de la sección cónicas, así como también dificultades comunes presentes en la parte gráfica, álgebraica y trigonométrica. Dichas dificultades subrayan la revisión de conceptos básicos, el uso de ejemplos de la vida cotidiana, y la falta de práctica constante para superar estas dificultades.

Sería importante abordar en otro trabajo de investigación las barreras psicológicas y emocionales que se pueden generar en los estudiantes al estudiar el contenido de las cónicas, y al mismo tiempo conocer la conexión que existe entre la mente emocional y cognitiva en el aprendizaje, por lo que cultivar una actitud positiva y resiliente es tan primordial como dominar conceptos técnicos.

Finalmente, se considera que el tiempo designado para la enseñanza y el aprendizaje de la geometria analitica: sección cónicas es prudente, aunque, es importante una planificaicón que evite interrupciones causadas por eventos académicos, culturales, sociales o festivos que podrían reducir el tiempo efectivo de enseñanza. Se recalca una gestión eficiente para garantizar que los estudiantes reciban la instrucción completa y de calidad no solo en esta area sino en todas en general, de ese modo, se equilibran las demandas académicas con otros aspectos de la vida escolar.

CAPÍTULO V
CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

5.1 Conclusiones

- Se diagnóstico las dificultades de aprendizaje que presentaron los estudiantes de 3er Semestre de la Carrera de Pedagogía de Matemática y Física durante el aprendizaje de la geometría sección cónicas periodo 2023-2S, principalmente, se observó una comprensión desequilibrada entre los dominios algebraico y geométrico, con una tendencia a favorecer uno sobre el otro, se evidenció la falta de familiaridad con ecuaciones importantes de las cónicas, el predominio de un aprendizaje memorístico sobre uno reflexivo-crítico pues los estudiantes estarían memorizando fórmulas y procedimientos sin desarrollar una comprensión profunda de los conceptos, a lo que se suma la limitada utilización de herramientas tecnológicas como GeoGebra en el aula, restringe en los estudiantes la capacidad para visualizar y comprender dinámicamente las propiedades de las cónicas.
- La entrevista en profundidad permitió la identificación de las dificultades de enseñanza que presentó la profesora durante la enseñanza de la geometría analítica: sección cónicas. Aunque utiliza diversas estrategias metodológicas, se presenta una brecha entre estas intenciones y la percepción de los estudiantes, quienes reportan un predominio de métodos tradicionales y memorísticos. La docente reconoce que los estudiantes presentan dificultades significativas en las áreas algebraica, trigonométrica y gráfica, por lo que sugiere la necesidad de reforzar estos fundamentos. Aunque el tiempo asignado para la enseñanza de la geometría analítica se considera prudente, la docente menciona la necesidad de una mejor coordinación para evitar interrupciones en el proceso de enseñanza. Además de mencionar el uso de varias herramientas tecnológicas por parte de la docente, existe una discrepancia con la percepción de los estudiantes sobre su uso efectivo en el aula, lo que denota una aplicación ineficaz de estas herramientas en la práctica docente.
- Se fundamentó teóricamente las estrategias metodológicas para la enseñanza y para el aprendizaje de la geometría analítica: sección cónicas, la misma que consta de importancia, métodos, técnicas y estrategias tanto de enseñanza como de aprendizaje, del mismo modo, se presentó a la tecnología como un material didáctico más, fundamentación que facilitó el desarrollo de la investigación.
- Se diseñaron dos estrategias metodológicas para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría analítica: sección cónicas, la primera denominada “Descubrimiento-Visualización – Acción” combinada con “Problematización – Colaboración – Cognición”, la cual, creará un ambiente de aprendizaje dinámico y efectivo, que ayudará a superar las dificultades identificadas en la enseñanza y el aprendizaje de la sección cónicas, promoviendo una comprensión más profunda y una participación más activa de los estudiantes, y la segunda estrategia metodológica “Pensamiento – Activación – Socialización” combinada con “Colaboración - Asistencia – Metacognición”, creará un ambiente de aprendizaje inclusivo y centrado en el estudiante, siendo efectiva para

abordar las dificultades en la enseñanza y el aprendizaje de temas complejos en la sección cónicas, además fomentará una comprensión más profunda, una participación activa y un apoyo mutuo entre estudiantes - estudiantes y entre estudiantes - profesor. Finalmente cabe señalar que, las estrategias metodológicas se encuentran estructuradas de la siguiente manera: fundamentación de la estrategia metodológica para el proceso de enseñanza y aprendizaje de la sección cónicas en la asignatura de geometría analítica, diagnóstico para la instrumentación de la estrategia metodológica, objetivo general y planeación pedagógica.

5.2 Recomendaciones

- Se recomienda a los profesores de la Carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales de la Matemática y la Física que imparten la asignatura de geometría analítica, que durante la enseñanza y el aprendizaje de la sección cónicas hagan uso de las estrategias metodológicas planteadas a través de esta investigación, porque se encuentran diseñadas con el fin de fomentar una comprensión más profunda de lo enseñado, promoviendo un aprendizaje duradero acompañado del desarrollo de habilidades diversas como el pensamiento crítico y la resolución de problemas. Además, con el uso de estas estrategias metodológicas, se promueve la autonomía del estudiante y se facilita una evaluación formativa más efectiva, contribuyendo a una mejor retención del conocimiento, dando como resultado un aprendizaje no solo significativo, sino dialógico y participativo entre estudiantes y profesora, y entre estudiantes - estudiantes.
- Se recomienda a los estudiantes de la Carrera que incursionen en otros temas de investigación relacionados con estrategias metodológicas para la enseñanza y el aprendizaje de otras áreas del conocimiento de la ciencia matemática, ya que permitirá enriquecer la comprensión de los conceptos matemáticos fundamentales, al mismo tiempo que, brindará la oportunidad de desarrollar prácticas educativas más innovadoras y efectivas.

CAPÍTULO VI

PROPUESTA

El diseño de la propuesta se encuentra en el siguiente código QR.

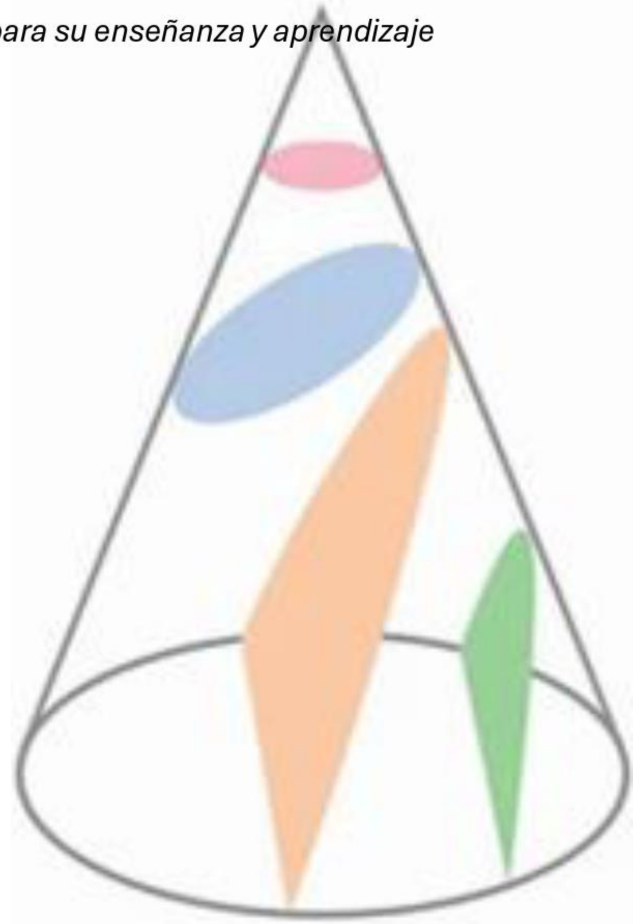
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CHIMBORAZO

CÓNICAS EN ACCIÓN

Estrategias metodológicas para su enseñanza y aprendizaje

Autora:

Karina Vega Molina



Tutora:

Ph. D Mirella Vera Rojas

Riobamba, 2024

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE FIGURAS

1.1 Título de la propuesta

"Cónicas en acción: Estrategias metodológicas para su enseñanza y aprendizaje"

1.2 Objetivo General

Diseñar estrategias metodológicas para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría analítica: sección cónicas, con la finalidad de que el estudiante aumente el interés por aprender, desarrolle el pensamiento crítico, abstracto y resuelva problemas de la vida cotidiana contextualizando lo teórico con lo práctico.

1.3 Justificación

La propuesta resultado de la investigación diseña estrategias metodológicas que contribuirán a la mejora de la enseñanza y del aprendizaje de la geometría analítica: sección cónicas, facilitando el trabajo colaborativo, la comprensión de conceptos, elementos, fórmulas, gráficas y la potenciación de habilidades cognitivas de los estudiantes, tornándose la enseñanza más dinámica y el aprendizaje más activo, efectivo y duradero al introducir también el uso de recursos tecnológicos en la resolución de problemas.

Además, la importancia de la propuesta radica en que fomenta el interés de aprender al relacionar la teoría de las cónicas a aplicaciones prácticas y a situaciones del mundo real, por lo que su contribución al desarrollo general de habilidades matemáticas y del pensamiento crítico será innegable.

El diseño de estrategias metodológicas para la enseñanza y el aprendizaje de las cónicas resulta pertinente, ya que estas constituyen conceptos fundamentales en el estudio y comprensión de la geometría analítica.

La propuesta es factible, porque cuenta con bibliografía suficiente de la temática en estudio, así como también cuenta con el conocimiento de la investigadora y los recursos económicos necesarios para llevarla a cabo.

Los beneficiarios directos serán los estudiantes de tercer semestre de la carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales de la Matemática y la Física que actualmente están cursan y los que más adelante cursarán la asignatura de geometría analítica, así como los profesores que imparten e impartirán esta cátedra.

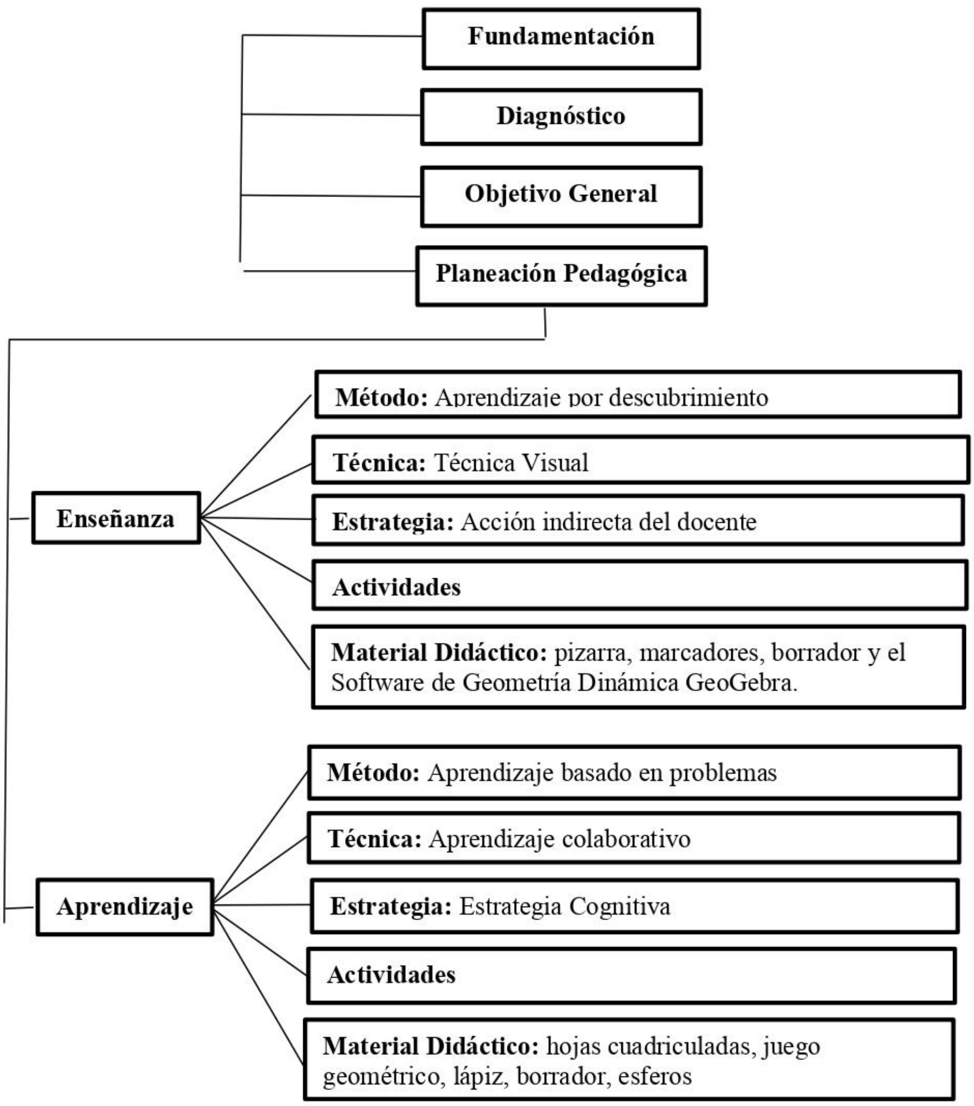
1.4 Diseño de la propuesta

ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS

1.4.1 Estructura de la estrategia metodológica 1: Descubrimiento-Visualización-Acción para el proceso de enseñanza y Problematización-Colaboración-Cognición para el proceso de aprendizaje de la sección cónicas en la asignatura de geometría analítica.

Figura 1.

Estrategia Metodológica 1.



Nota: Elaborado por Karina Vega

1.4.1.1 Fundamentación de la estrategia metodológica para el proceso de enseñanza aprendizaje de la sección cónicas en la asignatura de geometría analítica

Las estrategias metodológicas para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría analítica: sección cónicas requiere de la delimitación de un conjunto de fundamentos teóricos que sirven de base a su propuesta.

La naturaleza del trabajo de investigación determinó la necesidad de reconocer diferentes conceptos en referencia al desarrollo de la propuesta, es así que la geometría analítica, al ser como rama de la matemática es una ciencia que combina conceptos geométricos con técnicas algebraicas, permitiendo representar figuras y resolver problemas mediante el uso de coordenadas y ecuaciones.

De este modo, aparece la sección cónicas como una rama de la geometría analítica que "se concentra en el estudio de las curvas obtenidas al interceptar un cono con un plano y dependiendo de la orientación y la posición del plano en relación con el cono, se obtienen distintas formas geométricas que incluyen el circulo, parábola, elipse e hipérbola" (García Pérez, 2022).

Las estrategias metodológicas también consideradas como estrategias didácticas, se conciben como estructuras de actividad en las que se hacen reales los objetivos. En el concepto de "estrategias didácticas, se incluyen tanto las estrategias de aprendizaje (perspectiva del alumno) como las estrategias de enseñanza (perspectiva del profesor)" (Gallego & Salvador, 2002).

De acuerdo a Campuseducación (2020), "las estrategias metodológicas constituyen la forma de llevar a la práctica los principios metodológicos, es decir, la puesta en práctica de forma didáctica y pedagógica, de la propia metodología".

Por lo tanto, Quintero (2011) argumenta que "las estrategias metodológicas son las que permiten identificar principios y criterios, a través de métodos, técnicas y procedimientos que constituyen una secuencia ordenada y planificada permitiendo la construcción de conocimientos durante el proceso enseñanza y aprendizaje".

Dentro de las estrategias metodológicas, se presentan métodos, técnicas, estrategias de enseñanza y aprendizaje, los cuáles en conjunto forman parte de la estrategia metodológica.

El “método es la vía que facilita el descubrimiento de conocimientos seguros y confiables para solucionar los problemas que la vida nos plantea” (Martínez, 1999).

Se considera técnica al proceso de trabajo o de producción que supone una manera de hacer las cosas desarrollada por el aprendizaje, pero “no es un saber teórico o dones artístico particularmente desarrollados, sino como sinónimo de práctica que concurren a la aplicación de la ciencia propiamente dicha o conocimiento teórico a la actividad práctica” (Roca Rosales & Zambrano Rodríguez, 2012).

La estrategia es un procedimiento para tomar decisiones en una determinada circunstancia. Es utilizada para alcanzar uno o varios objetivos previamente definidos (Westreicher, 2024). Es el camino a seguir para alcanzar ciertas metas.

En definitiva, las estrategias metodológicas son el conjunto de métodos, técnicas y estrategias que tienen un fin en común, lograr un aprendizaje dialógico y participativo, constituidas por recursos esenciales que diseñan y desarrollan procesos de enseñanza y aprendizaje efectivos.

1.4.1.2 Diagnóstico para la instrumentación de la estrategia metodológica

El enfoque tradicional en la enseñanza de la geometría analítica: sección cónicas ha mostrado limitaciones significativas en cuánto a la efectividad y el compromiso por parte del estudiante. A pesar de que la enseñanza tradicional ofrece ciertas ventajas, como el acompañamiento detallado del docente, tiende a desarrollar un aprendizaje memorístico que no promueve una comprensión profunda, la aplicación práctica del conocimiento, el aprendizaje relevante y duradero. Esta metodología frecuentemente no motiva a los estudiantes y por ende no demuestra la relevancia del estudio de las cónicas en diferentes contextos.

Una falta de integración entre los dominios geométrico y algebraico en la enseñanza de la sección cónicas, desemboca en una enseñanza fragmentada del conocimiento, mientras que la ausencia de herramientas tecnológicas en el desarrollo del proceso educativo limita las oportunidades de aprendizaje interactivo y visual, que podrían enriquecer significativamente el aprendizaje del estudiante.

Finalmente, sin una comprensión clara de cómo el estudio de la sección cónicas estimula el pensamiento abstracto, desarrolla el razonamiento lógico y promueve habilidades de resolución de problemas, provoca que los estudiantes pierdan el interés lo que les impide apreciar la importancia del estdio de las cónicas en su formación académica y personal.

Con el diseño de la estrategia metodológica propuesta, se pretende dar mayor énfasis a los dominios geométricos sobre los algebraicos dentro del estudio de la geometría analítica sección cónicas, por lo tanto su enseñanza se desarrollará por descubrimiento acompañada de la visualización de ilustraciones y de la acción directa del docente, conduciendo al aprendizaje basado en problemas y la colaboración conjunta de estudiantes quienes desarrollaran diversas actividades y con la ayuda del material didáctico seleccionado desarrollarán habilidades cognitivas y metacognitivas, haciendo del proceso educativo, un proceso interesante, dinámico, participativo, crítico y en equipo.

1.4.1.3 Objetivo General

Orientar la enseñanza de las secciones cónicas mediante la estrategia metodológica de enseñanza y de aprendizaje denominada descubrimiento-visualización-acción, problematización-colaboración-cognición, con lo que se proporcionará a los estudiantes la comprensión de conceptos geométricos, desarrollando habilidades cruciales como la resolución de problemas, el pensamiento crítico y el trabajo en equipo.

1.4.1.4 Planeación Pedagógica

1.4.1.4.1 Enseñanza

El Método que se utilizará para la enseñanza de la sección cónicas dentro de la asignatura de geometría analítica será el Aprendizaje por Descubrimiento para que los estudiantes aprendan a descubrir conceptos y principios por sí mismos, en lugar de simplemente recibir información o instrucciones de un maestro o libro de texto (Rios Reyes, 2023).

Mientras que la técnica que se utilizará la para la enseñanza de la sección cónicas será la Técnica Visual, en donde, el docente utilizará recursos visuales para la adquisición de los conocimientos de los estudiantes tales como: como imágenes, gráficos, mapas conceptuales o presentaciones (Stpatraci, 2023).

La estrategia que se empleará durante el proceso educativo será la Acción indirecta del docente, la cual facilitará el planteamiento de situaciones para que el estudiante descubra y construya los conocimientos. En este caso la función del docente será la de mediar para que el estudiante adquiera con mayor facilidad el aprendizaje de las cónicas. (Toledo Castillo et al., 2022).

Por otra parte las actividades a desarrollarse para la enseñanza de la sección cónicas dentro de la asignatura de geometría analítica serán las actividades introductorias, de desarrollo y consolidación, de refuerzo, ampliación y síntesis, de evaluación, y actividades de aplicación.

Finalmente el material didáctico que utilizará el docente para la enseñanza de la sección cónicas dentro de la asignatura de geometría analítica será la pizarra, marcadores, borrador, y el Software de Geometría dinámica GeoGebra

1.4.1.4.2 Aprendizaje

El método que se utilizará la para el aprendizaje de la sección cónicas será el Aprendizaje Basado en Problemas, a través del cual se resolverán problemas como punto de partida para la adquisición e integración de ~~los~~ nuevos conocimientos Barrows (1986), citado por (Morales & Landa, 2004).

La técnica a utilizar para el aprendizaje de la sección cónicas será el Aprendizaje Colaborativo, el mismo que permitirá trabajar en grupos con los estudiantes, facilitando la interacción permanente con el profesor (Delgado & Palacios).

La estrategia a emplear será la Cognitiva que ayudará a integrar el conocimiento nuevo con el conocimiento previo (Toledo Castillo et al., 2022).

Las actividades a desarrollarse durante el aprendizaje de la sección cónicas serán las actividades introductorias, de desarrollo y consolidación, de refuerzo, ampliación y síntesis, de evaluación, y actividades de aplicación.

Mientras que el material didáctico que se utilizará será: hojas cuadriculadas, juego geométrico, lápiz, borrador, esferos

1.4.2 Estructura para la aplicación de la Estrategia Metodológica 1 para lo cual se toma como modelo la Parábola.

Tabla 1.
Estrategia Metodológica 1

Cónica	Definición	Estrategia Metodológica	Actividades
Parábola	Figura geométrica, la cual, se forma cuando el plano es paralelo a los lados del cono (Huera Guzmán, 2022).	**Para la enseñanza:** Descubrimiento-Visualización - Acción (D-V-A)	**1. Actividades introductorias (experiencia concreta)** 1.1. Visualización avanzada: Presentar en la clase una serie de imágenes y videos que muestren aplicaciones reales de la parábola en la ingeniería y la física. 1.2. Exploración práctica: Proporcionar a los estudiantes material para crear secciones cónicas físicas (cortar un cono de espuma con diferentes ángulos) para observar la formación de la cónica parábola. 1.3. Activación de conocimientos previos: Organizar grupos para discutir sobre las propiedades geométricas y algebraicas de la parábola.

Para el aprendizaje: Problematización-Colaboración-Cognición (P-C-C)	**2. Actividades de desarrollo y consolidación (análisis reflexivo)** 2.1. Experimentación guiada: Utilizar el software GeoGebra para explorar acerca de las propiedades geométricas y algebraicas de la parábola. 2.2. Análisis colaborativo: Formar equipos de trabajo para investigar y presentar aspectos fundamentales de la parábola. • Historia y desarrollo de la parábola. • Propiedades geométricas de la parábola. • Ecuaciones y representaciones algebraicas. • Aplicaciones de la parábola en la física y la ingeniería.

2.3.Profundización: Organizar la presentación de los equipos de trabajo, en donde se muestran sus hallazgos, seguido de una reflexión crítica de lo estudiado.

3. **Actividades de refuerzo ampliación y síntesis (conceptualización abstracta)**

3.1. Modelación matemática: Presentar ejercicios

3.2. Demostración formal: Guiar a los estudiantes en la solución de los ejercicios a partir de su definición matemática.

3.3. Conceptualización: Desarrollar un mapa conceptual colaborativo, en donde, se conectan los aspectos estudiados de la parábola (definición, propiedades, ecuaciones y aplicaciones)

4. **Actividades de evaluación (aplicación activa)**

4.1. Resolución de problemas avanzados: Proponer una serie de ejercicios para la resolución individual de cada estudiante.

5. **Actividades de aplicación (experiencia activa)**

	5.1. Investigación aplicada: Proponer a los estudiantes que investiguen y presenten aplicaciones avanzadas de la parábola en campos como la astrofísica y la óptica.

Nota: Elaborado por Karina Vega

1.4.3 Conclusión de la estrategia metodológica 1

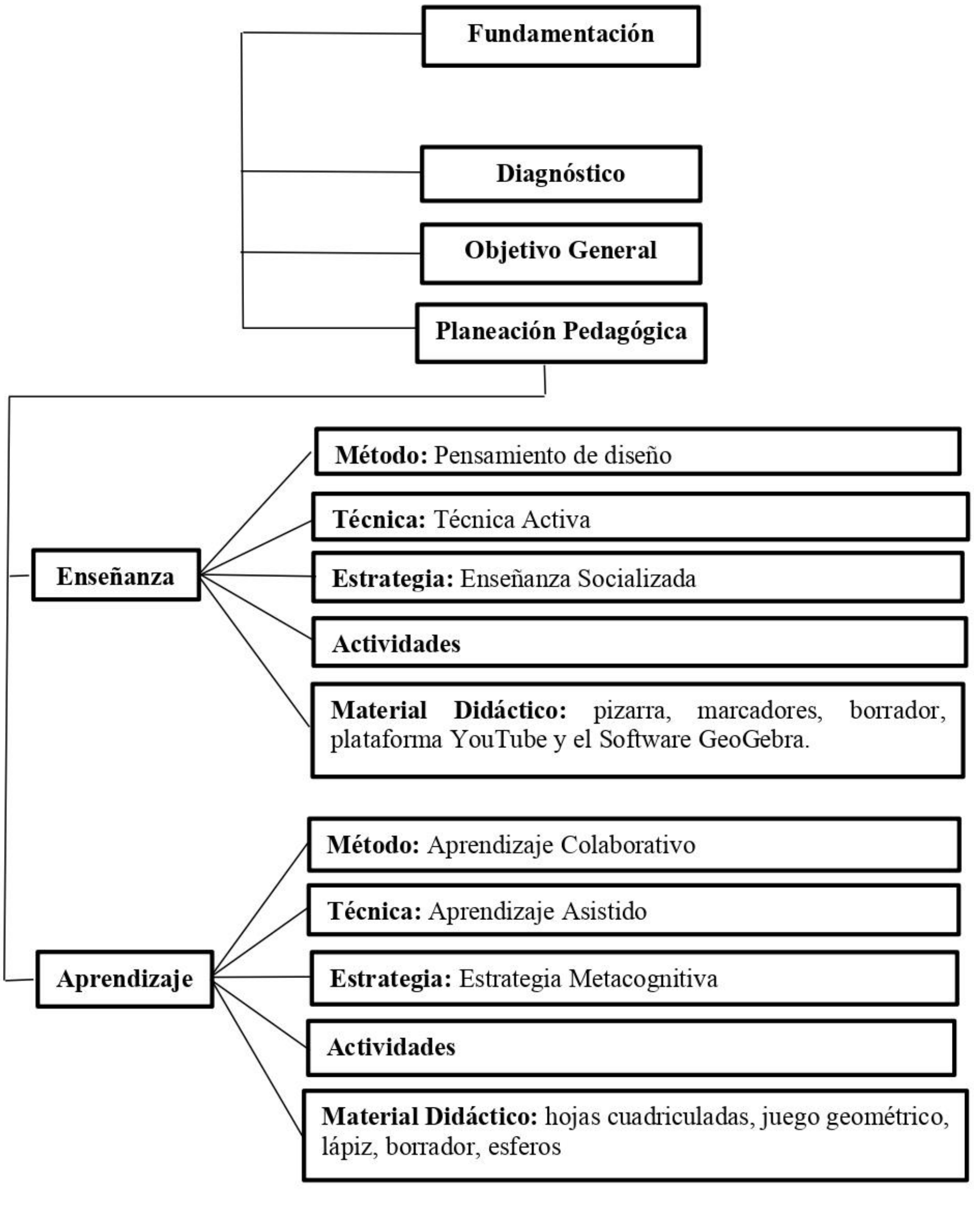
El diseño de la estrategia metodológica de enseñanza y aprendizaje de las secciones cónicas denominada Descubrimiento-Visualización-Acción y Problematización-Colaboración-Cognición ofrece un enfoque integral y efectivo, ya que no solo facilita la comprensión de conceptos geométricos, sino que también promueve el desarrollo del pensamiento crítico, la creatividad y las habilidades de resolución de problemas. De esta manera, fortalece las habilidades sociales y de trabajo en equipo preparandolos para los desafíos del mundo real mediante el desarrollo de habilidades fundamentales para el éxito académico y personal de los estudiantes.

1.4.4 Recomendación de la estrategia metodológica 1

Se recomienda la aplicación de está estrategia metodológica durante el proceso de enseñanza y de aprendizaje de la geometría analítica sección cónicas~~,~~ puesto que, mejora la comprensión conceptual de los estudiantes a través de la visualización y experimentación interactiva, desarrolla habilidades cruciales como la resolución de problemas, el pensamiento crítico y el trabajo en equipo.

1.4.5 **Estructura de la estrategia metodológica 2:** Pensamiento-Activación-Socialización para el proceso de enseñanza y Colaboración-Asistencia-Metacognición para el proceso de aprendizaje de la sección cónicas en la asignatura de geometría analítica.

Figura 2.
Estrategia Metodológica 2



Nota: Elaborado por Karina Vega

1.4.5.1 Fundamentación de la estrategia metodológica para el proceso de enseñanza aprendizaje de la sección cónicas en la asignatura de geometría analítica

Las estrategias metodológicas para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría analítica: sección cónicas requiere de la delimitación de un conjunto de fundamentos teóricos que sirven de base a su propuesta.

La naturaleza del trabajo de investigación determinó la necesidad de reconocer diferentes conceptos en referencia al desarrollo de la propuesta, es así que la geometría analítica, al ser como rama de la matemática es una ciencia que combina conceptos geométricos con técnicas algebraicas, permitiendo representar figuras y resolver problemas mediante el uso de coordenadas y ecuaciones.

De este modo, aparece la sección cónicas como una rama de la geometría analítica que se concentra en el estudio de las curvas obtenidas al interceptar un cono con un plano y dependiendo de la orientación y la posición del plano en relación con el cono, se obtienen distintas formas geométricas que incluyen el circulo, parábola, elipse e hipérbola (García Pérez, 2022).

Las estrategias metodológicas también consideradas como estrategias didácticas, se conciben como estructuras de actividad en las que se hacen reales los objetivos. En el concepto de estrategias didácticas, se incluyen tanto las estrategias de aprendizaje (perspectiva del alumno) como las estrategias de enseñanza (perspectiva del profesor) (Gallego & Salvador, 2002).

De acuerdo a (Campuseducación, 2020), las estrategias metodológicas constituyen la forma de llevar a la práctica los principios metodológicos, es decir, la puesta en práctica de forma didáctica y pedagógica, de la propia metodología.

Por lo tanto, (Quintero, 2011) argumenta que las estrategias metodológicas son las que permiten identificar principios y criterios, a través de métodos, técnicas y procedimientos que constituyen una secuencia ordenada y planificada permitiendo la construcción de conocimientos durante el proceso enseñanza y aprendizaje.

Dentro de las estrategias metodológicas, se presentan métodos, técnicas, estrategias de enseñanza y aprendizaje, los cuáles en conjunto forman parte de la estrategia metodológica.

El método es la vía que facilita el descubrimiento de conocimientos seguros y confiables para solucionar los problemas que la vida nos plantea (Martínez, 1999).

Se considera técnica al proceso de trabajo o de producción que supone una manera de hacer las cosas desarrollada por el aprendizaje, pero no es un saber teórico o dones artístico particularmente desarrollados, sino como sinónimo de práctica que concurren a la aplicación de la ciencia propiamente dicha o conocimiento teórico a la actividad práctica (Roca Rosales & Zambrano Rodríguez, 2012).

La estrategia es un procedimiento para tomar decisiones en una determinada circunstancia. Es utilizada para alcanzar uno o varios objetivos previamente definidos (Westreicher, 2024). Es el camino a seguir para alcanzar ciertas metas.

En definitiva, las estrategias metodológicas son el conjunto de métodos, técnicas y estrategias que tienen un fin en común, lograr un aprendizaje dialógico y participativo, constituidas por recursos esenciales que diseñan y desarrollan procesos de enseñanza y aprendizaje efectivos.

1.4.5.2 Diagnóstico para la instrumentación de la estrategia metodológica

El enfoque tradicional en la enseñanza de la geometría analítica: sección cónicas ha mostrado limitaciones significativas en cuánto a la efectividad y el compromiso por parte del estudiante. A pesar de que la enseñanza tradicional ofrece ciertas ventajas, como el acompañamiento detallado del docente, tiende a desarrollar un aprendizaje memorístico que no promueve una comprensión profunda, la aplicación práctica del conocimiento, el aprendizaje relevante y duradero. Esta metodología frecuentemente no motiva a los estudiantes y por ende no demuestra la relevancia del estudio de las cónicas en diferentes contextos.

Una falta de integración entre los dominios geométrico y algebraico en la enseñanza de la sección cónicas, desemboca en una enseñanza fragmentada del conocimiento, mientras que la ausencia de herramientas tecnológicas en el desarrollo del proceso educativo limita las oportunidades de aprendizaje interactivo y visual, que podrían enriquecer significativamente el aprendizaje del estudiante.

Finalmente, sin una comprensión clara de cómo el estudio de la sección cónicas estimula el pensamiento abstracto, desarrolla el razonamiento lógico y promueve habilidades de resolución de problemas, provoca que los estudiantes pierdan el interés lo que les impide apreciar la importancia del estdio de las cónicas en su formación académica y personal.

Con el diseño de la estrategia metodológica propuesta, se pretende dar mayor énfasis a los dominios geométricos sobre los algebraicos dentro del estudio de la geometría analítica sección cónicas, por lo tanto su enseñanza se desarrollará por descubrimiento acompañada de la visualización de ilustraciones y de la acción directa del docente, conduciendo al aprendizaje basado en problemas y la colaboración conjunta de estudiantes quienes desarrollaran diversas actividades y con la ayuda del material didáctico seleccionado desarrollarán habilidades cognitivas y metacognitivas, haciendo del proceso educativo, un proceso interesante, dinámico, participativo, crítico y en equipo.

1.4.5.3 Objetivo General

Proporcionar la estrategia metodológica para la enseñanza y el aprendizaje de la sección cónicas denominada diseño-activación-socialización, colaboración-asistencia-metacognición, con lo que se fomentara en la creatividad, el pensamiento crítico, la autonomía en el aprendizaje y el desarrollo cognitivo, ayudando a los estudiantes a ser más independientes, seguros y capaces en su proceso educativo.

1.4.5.4 Planeación Pedagógica

1.4.5.4.1 Enseñanza

El Método que se utilizará para la enseñanza de la sección cónicas dentro de la asignatura de geometría analítica será el Pensamiento de diseño (Design Thinking), que propicia el desarrollo de competencias para la resolución de problemas a través del trabajo grupal de los estudiantes, de manera creativa (Toledo Castillo et al., 2022).

Mientas que la técnica que se utilizará la para la enseñanza de la sección cónicas será la Técnica Activa, que se enfoca en que el alumno participe activamente el proceso de aprendizaje, a través de actividades como la resolución de problemas (Stpatraci, 2023).

La estrategia que se utilizará que se empleara durante el proceso educativo será la Enseñanza Socializada, la cual tiene su origen en la concepción de que el docente y los estudiantes conforman un grupo de aprendizaje En este grupo pueden generarse distintos tipos de comunicación, ya sea, comunicación directa, comunicación colectiva y la comunicación específica (Toledo Castillo et al., 2022).

Por otra parte las actividades a desarrollarse para la enseñanza de la sección cónicas dentro de la asignatura de geometría analítica serán las actividades introductorias, de desarrollo y consolidación, de refuerzo, ampliación y síntesis, de evaluación, y actividades de aplicación.

Finalmente el material didáctico que utilizará el docente para la enseñanza de la sección cónicas dentro de la asignatura de geometría analítica será la pizarra, marcadores, borrador, la Plataforma YouTube y el Software de Geometría dinámica GeoGebra.

1.4.5.4.2 Aprendizaje

El método que se utilizará la para el aprendizaje de la sección cónicas será el Aprendizaje Colaborativo o Cooperativo, que partiendo de la formación de grupos heterogéneos se busca mejorar el aprendizaje a través del trabajo conjunto. Involucra activamente a los alumnos para que procesen y sinteticen información y conceptos, en lugar de atender mera memorización de hechos y cifras (Panamericana, 2020).

La técnica a utilizar para el aprendizaje de la sección cónicas dentro de la asignatura será el Aprendizaje Asistido que tiene como objetivo el desarrollo de habilidades, destrezas y desempeños estudiantiles, mediante clases presenciales u otro ambiente de aprendizaje (Delgado & Palacios).

La estrategia a emplear será la Metacognitiva, en donde, los estudiantes integran lo nuevo con el conocimiento previo. Los procesos que intervienen son: atención, selección comprensión, elaboración, recuperación, aplicación (Toledo Castillo et al., 2022).

Las actividades a desarrollarse durante el aprendizaje de la sección cónicas serán las actividades introductorias, de desarrollo y consolidación, de refuerzo, ampliación y síntesis, de evaluación, y actividades de aplicación.

Mientras que el material didáctico que se utilizará será: hojas cuadriculadas, juego geométrico, lápiz, borrador, esferos

1.4.6 Estructura para la aplicación de la estrategia metodológica 2 para lo cual se toma como modelo la Elipse

Tabla 2.

Estrategia Metodológica 2

Cónica	Definición	Estrategia metodológica	Actividades
Elipse	Figura geométrica, la cuál es obtenida cuando el ángulo del plano relativo al cono se encuentra entre la superficie exterior del cono y la base del cono (Huera Guzmán, 2022).	**Para la enseñanza:** Pensamiento-Activación-Socialización (P-A-S)	1. **Actividades introductorias (experiencia concreta)** 1.1. Exploración visual: Utilizar el Software GeoGebra para mostrar cómo se genera una elipse como sección cónica. 1.2. Visualización avanzada: Presentar videos sobre aplicaciones avanzadas de la elipse. 1.3. Experimentación práctica: Proporcionar a los estudiantes materiales para construir elipses físicamente. Deberán medir y registrar las distancias focales y ejes para diferentes configuraciones. 2. **Actividades de desarrollo y consolidación (observación reflexiva)**

	2.1. Presentación interactiva: El docente presentará la teoría de la elipse. 2.2. Deducción colaborativa: Guiar a los estudiantes en la deducción de las ecuaciones, utilizando métodos de geometría analítica.
Para el aprendizaje: Colaboración-Asistencia-Metacognición (C-A-M)	2.3. Estudio de propiedades: Dividir la clase en equipos de trabajo para investigar y presentar propiedades específicas de la elipse: • Excentricidad y su relación con la forma de la elipse • Propiedades reflectivas y aplicaciones en óptica • Relación entre la elipse y otras cónicas (parábola, hipérbola) • Aplicaciones en mecánica celeste (Leyes de Kepler).

	3. Actividades de refuerzo ampliación y síntesis (conceptualización abstracta) 3.1.Profundización: Organizar la presentación de los equipos de trabajo, en donde, se muestran sus hallazgos, seguido de una reflexión crítica de la elipse. 3.2.Modelación matemática: Presentar ejercicios relacionados a la de elipse. 3.4.Demostración formal: Guiar a los estudiantes en la solución de los ejercicios a partir de su definición matemática. **4. Actividades de evaluación (aplicación activa)** 4.1.Evaluación del aprendizaje adquirido mediante la técnica de la prueba escrita. **5. Actividades de aplicación (experiencia activa)**

	5.1.Investigación aplicada: Proponer a los estudiantes que investiguen y presenten un ensayo sobre las aplicaciones avanzadas de la elipse en la nanotecnología y computación cuántica.

Nota: Elaborado por Karina Vega

1.4.7 Conclusión de la estrategia metodológica 2

La estrategia metodológica denominada diseño-activación-socialización y colaboración-asistencia-metacognición para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría analítica: sección cónicas se presenta de forma integral y efectiva, facilitando su comprensión profunda, cultivando habilidades de desarrollo como la creatividad, el pensamiento crítico y la autonomía en el aprendizaje.

1.4.8 Recomendación de la estrategia metodológica 2

Se recomienda la implementación de la presente estrategia metodológica en la enseñanza y el aprendizaje de la geometría analítica: sección cónicas, debido a que estimula el pensamiento crítico a través de la activación de conocimientos previos y la resolución de problemas, promueve el aprendizaje entre equipos y mejora las habilidades comunicativas.

BIBLIOGRÁFIA

Campuseducación, E. p. (28 de Enero de 2020). *Campus Educación*. Obtenido de https://www.campuseducacion.com/blog/recursos/articulos-campuseducacion/estrategias-metodologicas-en-la-programacion-didactica/

Delgado Álvarez, C., & Palacios Peña, P. (s.f.). *Universidad del Azuay*. Obtenido de https://www.uazuay.edu.ec/sites/default/files/public/TECNICAS-EDUCATIVAS.pdf

Gallego, J. L., & Salvador, F. (2002). Metodología de la acción didáctica. *Dialnet*.

García Pérez, J. R. (2022). Geometría Analítica en 4º ESO. *redined*, 52-54. Obtenido de https://redined.educacion.gob.es/xmlui/handle/11162/227763?show=full

Huera Guzmán, J. (03 de Junio de 2022). *Neurochispas*. Obtenido de https://www.neurochispas.com/wiki/secciones-conicas/#5-seccion-conica-%E2%80%93-circulo

Martínez. (1999). Criterios para la Superación del Debate Metodológico "Cuantitativo/Cualitativo ". *Revista Interam ericana de Psicologia/Interam erican Journal of Psychology, 33*(1), 79-107.

Morales Bueno, P., & Landa Fitzgerald, V. (2004). Aprendizaje basado en problemas. *UDG VIRTUAL, 13*, 145-157. Obtenido de http://biblioteca.udgvirtual.udg.mx/jspui/handle/123456789/574

Panamericana, P. (7 de Julio de 2020). *Preparatoria Panamericana*. Obtenido de https://blog.up.edu.mx/prepaup/femenil/que-es-el-aprendizaje-colaborativo-y-cuales-son-sus-beneficios

Quintero, Y. J. (mayo de 2011). La importancia de las estrategias en el ámbito educativo. *Eumed.net, 3*(27). Obtenido de https://www.eumed.net/rev/ced/27/yjqc.htm

Roca Rosales, G., & Zambrano Rodríguez, L. (Julio de 2012). *UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA EMPRESARIAL DE GUAYAQUIL*. Obtenido de http://biblioteca.uteg.edu.ec:8080/bitstream/handle/123456789/1049/T%C3%A9cnicas%20y%20m%C3%A9todos%20did%C3%A1cticos%20para%20desarrollar%20 destrezas%20b%C3%A1sicas%20del%20%C3%A1rea%20de%20lengua%20y%20literatura%20%20en%20los%20estudiantes%20de%20octav

Rios Reyes, R. (01 de septiembre de 2023). *Escuela de Profesores del Perú*. Obtenido de https://epperu.org/aprendizaje-por-descubrimiento/

Stpatraci. (29 de noviembre de 2023). *estrategias edu*. Obtenido de https://estrategiasedu.com/archivos/395/clasificacion-de-las-tecnicas-de-ensenanza/

Toledo Castillo, N. D., Villacís Venegas, N. Y., & Peñafiel Moncayo, I. R. (2022). *Estrategias de enseñanza - aprendizaje en la educación superior: Una experiencia en la ESPOCH.* Ambato, Tungurahua, Ecuador: Ciencia Digital. doi:https://doi.org/10.33262/cde.15

Westreicher, G. (05 de febrero de 2024). *economipedia*. Obtenido de https://economipedia.com/definiciones/estrategia.html

BIBLIOGRÁFIA

Acosta, S., & García, M. (2012). Estrategias de enseñanza utilizadas por los docentes de biología en las universidades públicas. *Omnia, 18*(02), 67-82. Obtenido de https://www.redalyc.org/pdf/737/73723402005.pdf

Aprendizaje, E. d. (10 de septiembre de 2021). *Estilos de Aprendizaje*. Obtenido de https://estilosdeaprendizaje.info/metodos/

Arias, F. (Julio de 2012). *El Proyecto de Investigación.* Obtenido de https://www.formaciondocente.com.mx/06_RinconInvestigacion/01_Documentos/El%20Proyecto%20de%20Investigacion.pdf

Bolívar, G. (28 de mayo de 2020). *Lidefer*. Obtenido de https://www.lifeder.com/secciones-conicas/

Bravo, E. (2023). *GeoGebra en la enseñanza-aprendizaje de las cónicas en el Segundo de Bachillerato Técnico.* Azogues: UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN .

Breda, A. (2020). Características del análisis didáctico realizado por profesores para justificar la mejora en la enseñanza de las matemáticas. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *34*, 69-88. https://doi.org/10.1590/1980-4415v34n66a04

Calcetero, M. A. (03 de Julio de 2023). *RobotLAB Group - Robotics Solution Integrator*. Obtenido de https://www.robotlab.com/blog/the-future-of-education-embracing-technology-for-enhanced-teaching

Calle, E., Mora, M., Jácome, M., & Breda, A. (2021). La enseñanza de las matemáticas en un curso de formación en contexto de pandemia: La percepción de futuros profesores de matemáticas de Ecuador. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, *20*, Article 20.

Corrales Jaar, J. (2021). Revisión actualizada: Enseñanza de las matemáticas desde los entornos virtuales de aprendizaje. *Ciencia y Educación*, *5*(2), 25-40.

Campuseducación, E. p. (28 de Enero de 2020). *Campus Educación*. Obtenido de https://www.campuseducacion.com/blog/recursos/articulos-campuseducacion/estrategias-metodologicas-en-la-programacion-didactica/

Corry, L. (3 de enero de 2024). *Encyclopedia Britannica*. Obtenido de https://www.britannica.com/science/algebra

Cuello, P., & Vizcaya, M. (abril de 2022). USO DE TÉCNICAS DE ENSEÑANZA PARA DESARROLLAR EL POTENCIAL CREATIVO EN LOS ESTUDIANTES DEL

PROGRAMA DE EDUCACIÓN INTEGRAL DE LA UPEL – IPB. *Scielo, 17*(1). Obtenido de https://ve.scielo.org/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1316-00872002000100004

Cueva, T., Jara, O., Arias, J., Flores, F., & Balmaceda, C. (21 de julio de 2023). *inudi*. doi:https://doi.org/10.35622/inudi.b.106

Delgado Álvarez, C., & Palacios Peña, P. (s.f.). *Universidad del Azuay*. Obtenido de https://www.uazuay.edu.ec/sites/default/files/public/TECNICAS-EDUCATIVAS.pdf

de Padua Franco Filho, A., & Paternina Montalvo, A. (2023). Sections of the light cone in Minkowski 4-space. *Revista Colombiana de Matemáticas, 57*(1), 1-18.

Duarte, S., Gutiérrez, Y., & Vilbuena, J. (2021). Intervención didáctica tecnológica para el estudio de las secciones cónicas basada en el potencial semiótico. *Scielo, 14*(1). doi:http://dx.doi.org/10.4067/S0718-50062021000100181

Educación 2020. (2 de Mayo de 2022). *Educación 2020*. Obtenido de https://www.educacion2020.cl/que-hacemos/aprendizaje-basado-en-proyectos/

Education, T. (15 de abril de 2024). *TET Education*. Obtenido de https://www.teteducation.com/clasificacion-metodos-ensenanza/#Clasificacion_segun_sistematizacion_de_conocimientos

Elizabeth Advíncula , C., Beteta Salas, M., León Ríos, J. C., Torres Céspedes, I., & Montes, M. (2021). El conocimiento matemático del profesor acerca de la parábola: diseño de un instrumento para investigación. *Scielo, 35*(1). doi:http://dx.doi.org/10.15359/ru.35-1.12

Equipo editorial, E. (31 de agosto de 2022). *Enciclopedia de ejemplos*. Obtenido de https://www.ejemplos.co/10-ejemplos-de-tecnicas-de-aprendizaje/

Euroinnova. (28 de octubre de 2022). *Euroinnova Business School*. Obtenido de https://www.euroinnova.ec/blog/metodos-y-estrategias-de-aprendizaje#metodos-de-aprendizajes

Fernández, G. (16 de Junio de 2020). *Repositorio Institucional de la Universidad de Oviedo*. Obtenido de http://hdl.handle.net/10651/59813

Fundación Ramón Areces. (2020). *Libro Blanco de las Matemáticas.* Madrid.

Gallego, J. L., & Salvador, F. (2002). Metodología de la acción didáctica. *Dialnet*.

Gamboa, R., & Ballestero, E. (2010). La enseñanza y aprendizaje de la geometría en secundaria, la perspectiva de los estudiantes. *Revista Electrónica Educare*, 125-142.

García. (6 de abril de 2021). *CELEE*. Obtenido de https://celee.uao.edu.co/antecedentes-de-investigacion/

García Flores, A. (2015). *Universidad Nacional Autónoma de México* . Obtenido de http://132.248.9.195/ptd2015/octubre/0736207/0736207.pdf

García Pérez, J. R. (2022). Geometría Analítica en 4º ESO. *redined*, 52-54. Obtenido de https://redined.educacion.gob.es/xmlui/handle/11162/227763?show=full

Garzón Zipa, C. J. (2020). *repositorio.uptc.* Obtenido de https://repositorio.uptc.edu.co/bitstream/handle/001/3720/Situaciones_didacticas_aprendizaje_conicas.pdf?sequence=1

Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, M. (2010). *METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN*. Obtenido de https://www.smujerescoahuila.gob.mx/wp-content/uploads/2020/05/Sampieri.Met.Inv.pdf

Huera Guzmán, J. (03 de Junio de 2022). *Neurochispas*. Obtenido de https://www.neurochispas.com/wiki/secciones-conicas/#5-seccion-conica-%E2%80%93-circulo

Kindle, J. (2019). *Geometría Analítica (Serie Schaum—Joseph H.Kindle).pdf*. https://www.academia.edu/27479944/Geometr%C3%ADa_Anal%C3%ADtica_Serie_Schaum_Joseph_H_Kindle_pdf

Lehmann. (2012). *Geometria Analitica Lehmann*. https://www.academia.edu/34497010/Geometria_Analitica_Lehmann

Lucio Alfredo, B. S., Isaías Francisco, D. P., & García , H. C. (Agosto de 2021). Estrategias de Aprendizaje. *Tecno Humanismo, 1*(8), 2. doi:https://doi.org/10.53673/th.v1i8.40

Martínez. (1999). Criterios para la Superación del Debate Metodológico “Cuantitativo/Cualitativo ”. *Revista Interam ericana de Psicologia/Interam erican Journal of Psychology, 33*(1), 79-107.

Martínez, A. (2021). Definición de Geometría. *Revista Educación Matemática*.

Meza, A. (2013). Estrategias de aprendizaje. Definiciones, clasificaciones e instrumentos de medición . *Própositos y Representaciones, 1*(2), 200-203. doi:http://dx.doi.org/10.20511/pyr2013.v1n2.48

Morales Bueno, P., & Landa Fitzgerald, V. (2004). Aprendizaje basado en problemas. *UDG VIRTUAL, 13*, 145-157. Obtenido de http://biblioteca.udgvirtual.udg.mx/jspui/handle/123456789/574

Muñoz, A. (08 de febrero de 2024). Obtenido de Medium: https://medium.com/@ajmv2000/investigaciones-mixtas-los-desaf%C3%ADos-de-combinar-lo-cuantitativo-y-lo-cualitativo-en-la-38b775a839cd

Murcia Valenzuela, L. C., Rodriguez Franco, A. S., & Sanchez Rodriguez, D. L. (2017). *UNIVERSIDAD DE CIENCIAS APLICADAS Y AMBIENTALES.* Obtenido de https://repository.udca.edu.co/server/api/core/bitstreams/ea6ae9b9-802e-4726-986d-db9a6c383b74/content

Murillo Quiñones, N. d. (2020). *repositorio.unal.* Obtenido de https://repositorio.unal.edu.co/bitstream/handle/unal/77611/1116438916.2020.pdf?sequence=7&isAllowed=y

Navarro Lores, D., & Samón Matos, M. (2017). Redefinición de los conceptos método de enseñanza y método de aprendizaje. *Universidad de Guantanámo, 16*(60), 26-33. Obtenido de https://www.redalyc.org/jatsRepo/4757/475753184013/html/index.html

Niño, V. (2011). *Scala Learning.* Obtenido de https://gc.scalahed.com/recursos/files/r161r/w24802w/Nino-Rojas-Victor-Miguel_Metodologia-de-la-Investigacion_Diseno-y-ejecucion_2011.pdf

Nolasco del Ángel, M. d. (2014). Estrategias de enseñanza en educación. *Vida Científica Boletín Científico de la Escuela Preparatoria No. 4, 2*(4). Obtenido de https://repository.uaeh.edu.mx/revistas/index.php/prepa4/article/view/1893

Panamericana, P. (7 de Julio de 2020). *Preparatoria Panamericana*. Obtenido de https://blog.up.edu.mx/prepaup/femenil/que-es-el-aprendizaje-colaborativo-y-cuales-son-sus-beneficios

Pearson, E. d. (2009). *Matemáticas Simplificadas* (2 ed.). Obtenido de https://clea.edu.mx/biblioteca/files/original/49e8f315f5a6b3cee6f01470e9093068.pdf

Pérez, Y. (2018). Análisis histórico-epistemológico-didáctico sobre las secciones cónicas. ARJÉ. Revista de Postgrado FaCE-UC. (12),22. http://arje.bc.uc.edu.ve/

Pérez Zambrano , M. M., & Camatón Arizabal, S. B. (2013). *Escuela Superior Politécnica del Litoral* . Obtenido de http://www.dspace.espol.edu.ec/handle/123456789/41474

Pérez, V., Valenzuela Castellanos, M., Díaz, A., & Núñez, J. C. (2013). Dificultades de aprendizaje en estudiantes universitarios de primer año. *Scielo*(508), 135-150. doi:http://dx.doi.org/10.4067/S0718-04622013000200010

Quintero, Y. J. (mayo de 2011). La importancia de las estrategias en el ámbito educativo. *Eumed.net*, *3*(27). Obtenido de https://www.eumed.net/rev/ced/27/yjqc.htm

Rios Reyes, R. (01 de septiembre de 2023). *Escuela de Profesores del Perú*. Obtenido de https://epperu.org/aprendizaje-por-descubrimiento/

Rivera, A. (2023). ¿Cómo varía la forma de las cónicas cuando su excentricidad tiende a uno o a cero? Un estudio exploratorio con profesores de bachillerato de una universidad mexicana. *Educación matemática*. doi:https://doi.org/10.24844/em3503.07

Roca Rosales, G., & Zambrano Rodríguez, L. (Julio de 2012). *UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA EMPRESARIAL DE GUAYAQUIL*. Obtenido de http://biblioteca.uteg.edu.ec:8080/bitstream/handle/123456789/1049/T%C3%A9cnicas%20y%20m%C3%A9todos%20did%C3%A1cticos%20para%20desarrollar%20destrezas%20b%C3%A1sicas%20del%20%C3%A1rea%20de%20lengua%20y%20literatura%20%20en%20los%20estudiantes%20de%20octav

Sánchez, L. E. (2018 de Diciembre de 2018). LA COMPRENSIÓN DEL OBJETO MATEMÁTICO PARÁBOLA A TRAVÉS DE REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS. *Cultura científica*, 146-156.

Sánchez Santiesteban, J. L., Cruz Ramírez, M., Cabrera Martínez, A., Sigarreta Almira, J. M., Sánchez Santiesteban, J. L., Cruz Ramírez, M., Cabrera Martínez, A., & Sigarreta Almira, J. M. (2022). El significado del concepto de pendiente desde la perspectiva universitaria. *Revista Universidad y Sociedad*, *14*(4), 156-171

Santa, Z. M., & Jaramillo, C. M. (2011). *Aplicaciones de la geometría del doblado de papel a las secciones cónicas*. https://bibliotecadigital.udea.edu.co/handle/10495/30736

Siavichay, C. A., & Velásquez, B. J. (23 de enero de 2021). *Repositorio Institucional Universidad de Cuenca*. Obtenido de http://dspace.ucuenca.edu.ec/handle/123456789/35927

Stpatraci. (29 de noviembre de 2023). *estrategias edu*. Obtenido de https://estrategiasedu.com/archivos/395/clasificacion-de-las-tecnicas-de-ensenanza/

Suárez Puente, D. I. (2022). *Universidad Técnica del Norte*. Obtenido de https://repositorio.utn.edu.ec/bitstream/123456789/12868/2/FECYT%204018%20TRABAJO%20DE%20GRADO.pdf

Toledo Castillo, N. D., Villacís Venegas, N. Y., & Peñafiel Moncayo, I. R. (2022). *Estrategias de enseñanza - aprendizaje en la educación superior: Una experiencia en la ESPOCH*. Ambato, Tungurahua, Ecuador: Ciencia Digital. doi:https://doi.org/10.33262/cde.15

Torres Villamar, J. V. (2024). Estrategias de aprendizaje basadas en las TIC para la enseñanza de las matemáticas en estudiantes de bachillerato. *Escuela de Posgrado Newman - EPN*. https://repositorio.epnewman.edu.pe/handle/20.500.12892/920

Vargas, M. (2020). Estrategias educativas y tecnología digital en el proceso. *Scielo*. Obtenido de http://www.scielo.org.bo/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1652-67762020000100010

Vásquez, J. (2023). *Repositorio UNACH.* Obtenido de http://dspace.unach.edu.ec/bitstream/51000/11653/1/UNACH-EC-FCEHT-PMF-0031-2023.pdf

Vintimilla, L. (2022). *Estrategias didácticas para la enseñanza de la circunferencia y elipse a través de TIC's para segundo de bachillerato .* Cuenca: UCuenca.

Weinstein, C., & Mayer, R. (1986). The Teaching of Learning Strategies. (M. Wittrock, Ed.) 315. Obtenido de https://dokumen.pub/handbook-of-research-on-teaching-third-edition.html

Westreicher, G. (05 de febrero de 2024). *economipedia*. Obtenido de https://economipedia.com/definiciones/estrategia.html

ANEXOS

7.1 Anexo 1.

Instrumento para identificar las dificultades que se presenta en el proceso de la enseñanza y el aprendizaje de la geometría analítica: sección cónicas en estudiantes de tercer semestre de la carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales de la Matemática y la Física.

Carrera de Pedagogía de las Matemáticas & la Física
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN, HUMANAS Y TECNOLOGÍAS

en movimiento
SGC
SISTEMA DE GESTIÓN DE LA CALIDAD

Universidad Nacional De Chimborazo
Facultad De Ciencias De La Educación, Humanas Y Tecnologías
Carrera De Pedagogía De Las Ciencias Experimentales: Matemáticas Y La Física
Encuesta aplicada a estudiantes del Tercer Semestre

Investigación: Estrategias metodológicas para la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría Analítica: Sección Cónicas

Género:

Edad:

Desde su perspectiva como estudiante que ha cursado la asignatura de Geometría Analítica:

1. **En las clases que imparte el docente, durante la enseñanza de las cónicas ¿A qué tipo de dominio da énfasis?**

   Algebraico ( )

   Geométrico ( )

   Ambos ( )

2. **¿Cuáles son los tipos de ecuaciones que se pueden reconocer con facilidad después de la clase cónica Circunferencia?**

   Ecuación General de la circunferencia ( )

   Ecuación Canónica de la Circunferencia ( )

   Ecuación Ordinaria de la Circunferencia ( )

   Ninguna ( )

3. **¿Cuáles son los tipos de ecuaciones que se pueden reconocer con facilidad después de estudiar la clase cónica Parábola?**

   Ecuación General de la parábola ( )

   Ecuación Canónica de la parábola ( )

   Ecuación Ordinaria de la parábola ( )

   Ninguna ( )

4. **¿Cuáles son los tipos de ecuaciones que se pueden reconocer con facilidad después de estudiar la clase cónica Elipse?**

Ecuación General de la elipse	( )
Ecuación Canónica de la elipse	( )
Ecuación Ordinaria de la elipse	( )
Ninguna	( )

5. **¿Cuáles son los tipos de ecuaciones que se pueden reconocer con facilidad después de estudiar la clase cónica Hipérbola?**

Ecuación General de la hipérbola	( )
Ecuación Canónica de la hipérbola	( )
Ecuación Ordinaria de la hipérbola	( )
Ninguna	( )

6. **En la enseñanza de la Geometría Analítica: Sección Cónicas, el docente generalmente hace uso de:**

La pizarra	( )
Del programa GeoGebra	( )
Del programa Geometry Mathematics	( )
Ninguna	( )
Otro	....

7. **El tiempo que se dedica para la enseñanza de la Geometría Analítica: Sección Cónicas durante el periodo académico, considera usted que:**

Es suficiente para su aprendizaje	( )
Es limitado para su aprendizaje.	( )

8. **Durante la enseñanza de la Geometría Analítica: Sección Cónicas ¿Qué tipo de aprendizaje promueve el docente?**

Aprendizaje memorístico.	( )
Aprendizaje reflexivo - crítico	( )

7.2 Anexo 2.

Instrumento para identificar las dificultades que se presenta en el proceso de la enseñanza y el aprendizaje de la geometría analítica: sección cónicas a la docente que imparte la asignatura en la carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales de la Matemática y la Física.

Carrera de Pedagogía de las Matemáticas & la Física
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN, HUMANAS Y TECNOLOGÍAS

en movimiento
SGC
SISTEMA DE GESTIÓN DE LA CALIDAD

Universidad Nacional De Chimborazo

Facultad De Ciencias De La Educación, Humanas Y Tecnologías

Carrera De Pedagogía De Las Ciencias Experimentales: Matemáticas Y La Física

Entrevista aplicada al docente encargado de la asignatura

Investigación: Estrategias metodológicas para la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría Analítica: Sección Cónicas

1. **¿Qué estrategia metodológica utiliza usted durante el desarrollo del proceso de enseñanza y de aprendizaje de la Geometría Analítica: Sección Cónicas?**

   ………………………………………………………………………………………………
   ………………………………………………………………………………………………
   ………………………………………………………………………………………………

2. **¿Con qué frecuencia hace uso de herramientas tecnológicas durante la enseñanza de la Geometría Analítica: Sección Cónicas?**

   ………………………………………………………………………………………………
   ………………………………………………………………………………………………
   ………………………………………………………………………………………………

3. **Durante el proceso de enseñanza de la Geometría Analítica: Sección Cónicas, ¿el alumno muestra interés por aprender?**

   ………………………………………………………………………………………………
   ………………………………………………………………………………………………
   ………………………………………………………………………………………………

4. **Desde su experiencia durante la enseñanza de Geometría Analítica: Sección Cónicas, ¿cuáles son las dificultades más comunes que presentan los estudiantes al momento de aprender?**

   ………………………………………………………………………………………………
   ………………………………………………………………………………………………
   ………………………………………………………………………………………………

5. **¿De qué manera ayuda a los estudiantes a superar las diferentes dificultades que presentan en el proceso de aprendizaje de la Geometría Analítica: Sección Cónicas?**

……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………

6. **¿El tiempo asignado en el período académico es apropiado para la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría Analítica: Sección Cónicas? ¿Por qué?**
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………

7.3 Anexo 3.

Validación de los instrumentos

Encuesta

Carrera de Pedagogía de las Matemáticas & la Física
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN, HUMANAS Y TECNOLOGÍAS

en movimiento SGC SISTEMA DE GESTIÓN DE LA CALIDAD

FICHA DE VALIDACIÓN DEL INSTRUMENTO DE RECOLECCIÓN DE DATOS
NOMBRE DEL INSTRUMENTO: ENCUESTA

Tema: Estrategias metodológicas para la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría Analítica: Sección Cónicas

Autora: Vega Molina Karina Elizabeth

Objetivos de la investigación:

1. **Objetivo General:**

Proponer estrategias metodológicas para la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría Analítica: Sección Cónicas en docentes y estudiantes de tercer semestre de la Carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales: Matemáticas y la Física.

2. **Objetivos Específicos**

- Fundamentar teóricamente las estrategias metodológicas para la enseñanza y para el aprendizaje de la Geometría Analítica: Sección Cónicas.
- Diagnosticar las dificultades de aprendizaje que presentan los estudiantes en el estudio de la Geometría Analítica: Sección Cónicas.
- Identificar las dificultades de enseñanza que presentan los profesores en el estudio de la Geometría Analítica: Sección Cónicas.
- Plantear estrategias metodológicas para la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría Analítica: Sección Cónicas.

Indicaciones:

En el apartado "Criterios a evaluar" de entre las 5 opciones se le solicita marcar con una X la respuesta escogida de acuerdo con el siguiente detalle:

Totalmente en desacuerdo	En desacuerdo	Ni de acuerdo ni en desacuerdo	De acuerdo	Totalmente de acuerdo
1	2	3	4	5

En el apartado de "Aspectos Generales" y "Evaluación General" marque con una X la respuesta escogida entre las opciones presentadas.

PREGUNTA	RITERIOS A EVALUAR																				Observaciones
	ADECUACIÓN															PERTINENCIA					
	La pregunta se comprende con facilidad					Opciones de respuesta adecuadas					Opciones de respuesta en orden lógico					Relación con el/los objetivo/s que se pretende estudiar					
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	
1					X					X					X					X	
2					X					X					X					X	
3					X					X					X					X	
4					X					X					X					X	
5					X					X					X					X	
6					X					X					X					X	
7					X					X					X					X	
8					X					X					X					X	

ASPECTOS GENERALES	SI	NO	Observaciones
El instrumento contiene instrucciones claras y precisas para responder la prueba.	✓		
La secuencia de ítems es adecuada.	X		
El número de ítems es suficiente.	X		

EVALUACIÓN GENERAL				
	Excelente	Satisfactorio	Necesita mejorar	Inadecuado
Validez del instrumento	X			

IDENTIFICACIÓN DEL EXPERTO		
Validado por: Cristian Carranco		Firma: C. Carranco
Cargo: Docente	Fecha: 15/02/2024	
C.I. 1003433388	Cel. 0993143295	

Universidad Nacional De Chimborazo

FICHA DE VALIDACIÓN DEL INSTRUMENTO DE RECOLECCIÓN DE DATOS
NOMBRE DEL INSTRUMENTO: ENCUESTA

Tema: Estrategias metodológicas para la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría Analítica: Sección Cónicas

Autora: Vega Molina Karina Elizabeth

Objetivos de la investigación:

1. **Objetivo General:**

Proponer estrategias metodológicas para la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría Analítica: Sección Cónicas en docentes y estudiantes de tercer semestre de la Carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales: Matemáticas y la Física.

2. **Objetivos Específicos**

- Fundamentar teóricamente las estrategias metodológicas para la enseñanza y para el aprendizaje de la Geometría Analítica: Sección Cónicas.
- Diagnosticar las dificultades de aprendizaje que presentan los estudiantes en el estudio de la Geometría Analítica: Sección Cónicas.
- Identificar las dificultades de enseñanza que presentan los profesores en el estudio de la Geometría Analítica: Sección Cónicas.
- Plantear estrategias metodológicas para la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría Analítica: Sección Cónicas.

Indicaciones:

En el apartado "Criterios a evaluar" de entre las 5 opciones se le solicita marcar con una X la respuesta escogida de acuerdo con el siguiente detalle:

Totalmente en desacuerdo	En desacuerdo	Ni de acuerdo ni en desacuerdo	De acuerdo	Totalmente de acuerdo
1	2	3	4	5

En el apartado de "Aspectos Generales" y "Evaluación General" marque con una X la respuesta escogida entre las opciones presentadas.

PREGUNTA	RITERIOS A EVALUAR																				Observaciones
	ADECUACIÓN															PERTINENCIA					
	La pregunta se comprende con facilidad					Opciones de respuesta adecuadas					Opciones de respuesta en orden lógico					Relación con el/los objetivo/s que se pretende estudiar					
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	
1					X					X					X					X	
2					X					X					X					X	
3					X					X					X					X	
4					X					X					X					X	
5					X					X					X					X	
6					X					X					X					X	
7					X					X					X					X	
8					X					X					X					X	

ASPECTOS GENERALES	SI	NO	Observaciones
El instrumento contiene instrucciones claras y precisas para responder la prueba.	X		
La secuencia de ítems es adecuada.	X		
El número de ítems es suficiente.	X		

EVALUACIÓN GENERAL				
Validez del instrumento	Excelente	Satisfactorio	Necesita mejorar	Inadecuado
	X			

IDENTIFICACIÓN DEL EXPERTO		
Validado por: MsC. Shonny Elbay.		Firma:
Cargo: Docente.	Fecha:	
C.I. 0604650762	Cel. 0980613029	

Universidad Nacional De Chimborazo

FICHA DE VALIDACIÓN DEL INSTRUMENTO DE RECOLECCIÓN DE DATOS
NOMBRE DEL INSTRUMENTO: ENCUESTA

Tema: Estrategias metodológicas para la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría Analítica: Sección Cónicas

Autora: Vega Molina Karina Elizabeth

Objetivos de la investigación:

1. **Objetivo General:**

Proponer estrategias metodológicas para la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría Analítica: Sección Cónicas en docentes y estudiantes de tercer semestre de la Carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales: Matemáticas y la Física.

2. **Objetivos Específicos**

- Fundamentar teóricamente las estrategias metodológicas para la enseñanza y para el aprendizaje de la Geometría Analítica: Sección Cónicas.
- Diagnosticar las dificultades de aprendizaje que presentan los estudiantes en el estudio de la Geometría Analítica: Sección Cónicas.
- Identificar las dificultades de enseñanza que presentan los profesores en el estudio de la Geometría Analítica: Sección Cónicas.
- Plantear estrategias metodológicas para la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría Analítica: Sección Cónicas.

Indicaciones:

En el apartado "Criterios a evaluar" de entre las 5 opciones se le solicita marcar con una X la respuesta escogida de acuerdo con el siguiente detalle:

Totalmente en desacuerdo	En desacuerdo	Ni de acuerdo ni en desacuerdo	De acuerdo	Totalmente de acuerdo
1	2	3	4	5

En el apartado de "Aspectos Generales" y "Evaluación General" marque con una X la respuesta escogida entre las opciones presentadas.

RITERIOS A EVALUAR																					
	ADECUACIÓN															PERTINENCIA					Observaciones
PREGUNTA	La pregunta se comprende con facilidad					Opciones de respuesta adecuadas					Opciones de respuesta en orden lógico					Relación con el/los objetivo/s que se pretende estudiar					
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	
1					x				x						x				x		
2					x				x						x				x		
3					x				x						x				x		
4					x				x						x				x		
5					x				x						x				x		
6					x				x						x				x		
7					x				x						x				x		
8					x				x						x				x		

ASPECTOS GENERALES	SI	NO	Observaciones
El instrumento contiene instrucciones claras y precisas para responder la prueba.	x		
La secuencia de ítems es adecuada.	x		
El número de ítems es suficiente.	x		

EVALUACIÓN GENERAL				
Validez del instrumento	Excelente	Satisfactorio	Necesita mejorar	Inadecuado
		x		

IDENTIFICACIÓN DEL EXPERTO		
Validado por: Norma Allauca		Firma:
Cargo: Docente	Fecha: 15-02-2024	
C.I. 0604079533	Cel. 0986821491	

Universidad Nacional De Chimborazo

Entrevista

Carrera de Pedagogía de las Matemáticas & la Física
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN, HUMANAS Y TECNOLOGÍAS

en movimiento
SGC
SISTEMA DE GESTIÓN DE LA CALIDAD

FICHA DE VALIDACIÓN DEL INSTRUMENTO DE RECOLECCIÓN DE DATOS
NOMBRE DEL INSTRUMENTO: ENTREVISTA

Tema: Estrategias metodológicas para la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría Analítica: Sección Cónicas

Autora: Vega Molina Karina Elizabeth

Objetivos de la investigación:

3. **Objetivo General:**

Proponer estrategias metodológicas para la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría Analítica: Sección Cónicas en docentes y estudiantes de tercer semestre de la Carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales: Matemáticas y la Física.

4. **Objetivos Específicos**

- Fundamentar teóricamente las estrategias metodológicas para la enseñanza y para el aprendizaje de la Geometría Analítica: Sección Cónicas.
- Diagnosticar las dificultades de aprendizaje que presentan los estudiantes en el estudio de la Geometría Analítica: Sección Cónicas.
- Identificar las dificultades de enseñanza que presentan los profesores en el estudio de la Geometría Analítica: Sección Cónicas.
- Plantear estrategias metodológicas para la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría Analítica: Sección Cónicas.

Indicaciones:

En el apartado "Criterios a evaluar" de entre las 5 opciones se le solicita marcar con una X la respuesta escogida de acuerdo con el siguiente detalle:

Totalmente en desacuerdo	En desacuerdo	Ni de acuerdo ni en desacuerdo	De acuerdo	Totalmente de acuerdo
1	2	3	4	5

En el apartado de "Aspectos Generales" y "Evaluación General" marque con una X la respuesta escogida entre las opciones presentadas.

CRITERIOS A EVALUAR											Observaciones
PREGUNTA	ADECUACIÓN La pregunta se comprende con facilidad					PERTINENCIA Relación con el/los objetivo/s que se pretende estudiar					
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	
1					X					X	
2					X					X	
3					X					X	
4					X					X	
5					X					X	
6					X					X	

ASPECTOS GENERALES	SI	NO	Observaciones
El instrumento contiene instrucciones claras y precisas para responder la prueba.	X		
La secuencia de ítems es adecuada.	X		
El número de ítems es suficiente.	X		

EVALUACIÓN GENERAL				
Validez del instrumento	Excelente	Satisfactorio	Necesita mejorar	Inadecuado
	X			

IDENTIFICACIÓN DEL EXPERTO		
Validado por: Cristian Carranco		Firma: C Carranco
Cargo: Docente	Fecha: 15/02/2024	
C.I. 1003433388	Cel: 0993143295	

FICHA DE VALIDACIÓN DEL INSTRUMENTO DE RECOLECCIÓN DE DATOS
NOMBRE DEL INSTRUMENTO: ENTREVISTA

Tema: Estrategias metodológicas para la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría Analítica: Sección Cónicas

Autora: Vega Molina Karina Elizabeth

Objetivos de la investigación:

3. **Objetivo General:**

Proponer estrategias metodológicas para la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría Analítica: Sección Cónicas en docentes y estudiantes de tercer semestre de la Carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales: Matemáticas y la Física.

4. **Objetivos Específicos**

- Fundamentar teóricamente las estrategias metodológicas para la enseñanza y para el aprendizaje de la Geometría Analítica: Sección Cónicas.
- Diagnosticar las dificultades de aprendizaje que presentan los estudiantes en el estudio de la Geometría Analítica: Sección Cónicas.
- Identificar las dificultades de enseñanza que presentan los profesores en el estudio de la Geometría Analítica: Sección Cónicas.
- Plantear estrategias metodológicas para la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría Analítica: Sección Cónicas.

Indicaciones:

En el apartado "Criterios a evaluar" de entre las 5 opciones se le solicita marcar con una X la respuesta escogida de acuerdo con el siguiente detalle:

Totalmente en desacuerdo	En desacuerdo	Ni de acuerdo ni en desacuerdo	De acuerdo	Totalmente de acuerdo
1	2	3	4	5

En el apartado de "Aspectos Generales" y "Evaluación General" marque con una X la respuesta escogida entre las opciones presentadas.

CRITERIOS A EVALUAR											Observaciones
PREGUNTA	ADECUACIÓN La pregunta se comprende con facilidad					PERTINENCIA Relación con el/los objetivo/s que se pretende estudiar					
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	
1					X					X	
2					X					X	
3					X					X	
4					X					X	
5					X					X	
6					X					X	

ASPECTOS GENERALES	SI	NO	Observaciones
El instrumento contiene instrucciones claras y precisas para responder la prueba.	X		
La secuencia de ítems es adecuada.	X		
El número de ítems es suficiente.	X		

EVALUACIÓN GENERAL				
Validez del instrumento	Excelente	Satisfactorio	Necesita mejorar	Inadecuado
	X			

IDENTIFICACIÓN DEL EXPERTO		
Validado por: MSC. Shanny Ilbay		Firma:
Cargo: Docente.	Fecha:	
C.I. 0604650762.	Cel: 0980613029	

FICHA DE VALIDACIÓN DEL INSTRUMENTO DE RECOLECCIÓN DE DATOS
NOMBRE DEL INSTRUMENTO: ENTREVISTA

Tema: Estrategias metodológicas para la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría Analítica: Sección Cónicas

Autora: Vega Molina Karina Elizabeth

Objetivos de la investigación:

3. **Objetivo General:**

Proponer estrategias metodológicas para la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría Analítica: Sección Cónicas en docentes y estudiantes de tercer semestre de la Carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales: Matemáticas y la Física.

4. **Objetivos Específicos**

- Fundamentar teóricamente las estrategias metodológicas para la enseñanza y para el aprendizaje de la Geometría Analítica: Sección Cónicas.
- Diagnosticar las dificultades de aprendizaje que presentan los estudiantes en el estudio de la Geometría Analítica: Sección Cónicas.
- Identificar las dificultades de enseñanza que presentan los profesores en el estudio de la Geometría Analítica: Sección Cónicas.
- Plantear estrategias metodológicas para la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría Analítica: Sección Cónicas.

Indicaciones:

En el apartado "Criterios a evaluar" de entre las 5 opciones se le solicita marcar con una X la respuesta escogida de acuerdo con el siguiente detalle:

Totalmente en desacuerdo	En desacuerdo	Ni de acuerdo ni en desacuerdo	De acuerdo	Totalmente de acuerdo
1	2	3	4	5

En el apartado de "Aspectos Generales" y "Evaluación General" marque con una X la respuesta escogida entre las opciones presentadas.

CRITERIOS A EVALUAR											Observaciones
PREGUNTA	ADECUACIÓN La pregunta se comprende con facilidad					PERTINENCIA Relación con el/los objetivo/s que se pretende estudiar					
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	
1					x					x	
2					x					x	
3					x					x	
4					x					x	
5					x					x	
6					x					x	

ASPECTOS GENERALES	SI	NO	Observaciones
El instrumento contiene instrucciones claras y precisas para responder la prueba.	x		
La secuencia de ítems es adecuada.	x		
El número de ítems es suficiente.	x		

EVALUACIÓN GENERAL				
Validez del instrumento	Excelente	Satisfactorio	Necesita mejorar	Inadecuado
		x		

IDENTIFICACIÓN DEL EXPERTO		
Validado por: Norma Allauca		Firma:
Cargo: Docente	Fecha: 15-02-2024	
C.I. 0604079533	Cel: 0986821491	