UNIVERSIDAD NACIONAL DE CHIMBORAZO
Facultad de Ciencias de la Educación, Humanas y Tecnologías
Carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales:
Matemáticas y la Física

Aula invertida en el aprendizaje de integrales definidas en los estudiantes de quinto semestre de la Universidad Nacional de Chimborazo.

Trabajo de Titulación para optar al título de Licenciado/a en Pedagogía de las Matemáticas y la Física

Autor:
Elvis Gustavo Guairacaja Ramirez

Tutor:
Dr. Roberto Salomón Villamarín Guevara

Riobamba, Ecuador. *2024*

DECLARATORIA DE AUTORÍA

Yo, Elvis Gustavo Guairacaja Ramirez con cédula de ciudadanía 060552304-2, autor (a) (s) del trabajo de investigación titulado: Aula invertida en el aprendizaje de integrales definidas en los estudiantes de quinto semestre de la Universidad Nacional de Chimborazo, certifico que la producción, ideas, opiniones, criterios, contenidos y conclusiones expuestas son de mí exclusiva responsabilidad.

Asimismo, cedo a la Universidad Nacional de Chimborazo, en forma no exclusiva, los derechos para su uso, comunicación pública, distribución, divulgación y/o reproducción total o parcial, por medio físico o digital; en esta cesión se entiende que el cesionario no podrá obtener beneficios económicos. La posible reclamación de terceros respecto de los derechos de autor (a) de la obra referida, será de mi entera responsabilidad; librando a la Universidad Nacional de Chimborazo de posibles obligaciones.

En Riobamba, 02 de abril de 2024.

Elvis Gustavo Guairacaja Ramirez

C.I: 060552304-2

ACTA FAVORABLE - INFORME FINAL DEL TRABAJO DE INVESTIGACIÓN

En la Ciudad de Riobamba, a los 31 días del mes de enero de 2024, luego de haber revisado el Informe Final del Trabajo de Investigación presentado por el estudiante **ELVIS GUSTAVO GUAIRACAJA RAMIREZ** con CC: **060552304-2**, de la carrera de **PEDAGOGÍA DE LAS CIENCIAS EXPERIMENTALES: MATEMÁTICAS Y LA FÍSICA** y dando cumplimiento a los criterios metodológicos exigidos, se emite el **ACTA FAVORABLE DEL INFORME FINAL DEL TRABAJO DE INVESTIGACIÓN** titulado **"Aula invertida en el aprendizaje de integrales definidas en los estudiantes de quinto semestre de la Universidad Nacional de Chimborazo"**, por lo tanto se autoriza la presentación del mismo para los trámites pertinentes.

Firmado electrónicamente por:
ROBERTO SALOMON
VILLAMARIN GUEVARA

____
PhD. Roberto Salomón Villamarín Guevara
TUTOR

CERTIFICADO DE LOS MIEMBROS DEL TRIBUNAL

Quienes suscribimos, catedráticos designados Miembros del Tribunal de Grado para la evaluación del trabajo de investigación Aula invertida en el aprendizaje de integrales definidas en los estudiantes de quinto semestre de la Universidad Nacional de Chimborazo, por Elvis Gustavo Guairacaja Ramirez, con cédula de identidad número 0605523042, bajo la tutoría de Dr. Roberto Salomón Villamarín Guevara certificamos que recomendamos la APROBACIÓN de este con fines de titulación. Previamente se ha evaluado el trabajo de investigación y escuchada la sustentación por parte de su autor; no teniendo más nada que observar.

De conformidad a la normativa aplicable firmamos, en Riobamba 02 de abril del 2024.

Presidente del Tribunal de Grado Dr. Luis Fernando Pérez Chávez	Firma
Miembro del Tribunal de Grado Dra. Angélica María Urquizo Alcívar	Firma
Miembro del Tribunal de Grado Dra. Carmen Varguillas Carmona	Firma

CERTIFICACIÓN

Que, el señor **Guairacaja Ramirez Elvis Gustavo** con CC: **060552304-2**, estudiante de la Carrera de PEDAGOGÍA DE LAS CIENCIAS EXPERIMENTALES MATEMÁTICAS Y LA FÍSICA, Facultad de CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN, HUMANAS Y TECNOLOGÍAS; ha trabajado bajo mi tutoría el trabajo de investigación titulado: "**AULA INVERTIDA EN EL APRENDIZAJE DE INTEGRALES DEFINIDAS EN LOS ESTUDIANTES DE QUINTO SEMESTRE DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DE CHIMBORAZO**", cumple con el 10%, de acuerdo al reporte del sistema Anti plagio Turniting, porcentaje aceptado de acuerdo a la reglamentación institucional, por consiguiente autorizo continuar con el proceso.

Riobamba, 28 de marzo de 2024

Firmado electrónicamente por:
ROBERTO SALOMON
VILLAMARIN GUEVARA

____
Roberto Salomón Villamarín Guevara, PhD
TUTOR

DEDICATORIA

Este trabajo está dedicado:

A mis familiares José, María, Luis y Evelyn, quienes con su amor, paciencia y esfuerzo diario me han apoyado, permitiendo que pueda llegar a cumplir hoy un objetivo más, gracias por inculcar en mí el ejemplo de esfuerzo y valentía, de no temer a los problemas e inconvenientes que se presentan en la vida porque ellos están conmigo.

Elvis Gustavo

AGRADECIMIENTO

Quiero expresar mi más sincero agradecimiento PhD. Roberto Villamarín por su guía constante y valiosos aportes durante la realización de mi trabajo de titulación. Su experiencia y orientación fueron fundamentales para alcanzar este logro académico

Agradezco a mis padres por haberme dado la oportunidad de estudiar, guiar mis pasos para cumplir mis objetivos, sin su apoyo, este trabajo no habría sido posible. Gracias a todos los que contribuyeron de alguna manera a este proyecto.

Elvis Gustavo

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE TABLAS.

ÍNDICE DE FIGURAS

RESUMEN

En el presente trabajo de investigación aula invertida en el aprendizaje de integrales definidas en los estudiantes de quinto semestre de la Universidad Nacional de Chimborazo, deriva de la necesidad de que el estudiante tenga un auto aprendizaje estructurado en temas que se ven contenidos en el silabo de la asignatura de cálculo integral. En esta investigación se desarrolló de guías de aprendizaje y material audio visual (videos) para el aprendizaje de integrales definidas para los estudiantes de quinto de la Carrera de Pedagogía de las ciencias experimentales Matemáticas y Física en la Universidad Nacional de Chimborazo, es una investigación de carácter cuantitativa con diseño no experimental, propositiva. Se selecciono como población los temas del silabo de cálculo integral de quinto semestre. Se realizo una investigación bibliográfica que permitió incorporar conceptos como aula invertida, material didáctico, guion de videos, ciclo de Kolb, también se detalló los temas importantes del silabo de la asignatura que guarde relación con el tema de integrales definidas, se utilizaron criterios que permiten entender los conceptos revisados antes de la incorporación al trabajo de investigación, entonces después de haber diseñado guías de aprendizaje y material audiovisual para su aplicación en la metodología del aula invertida, se puede concluir que ofrece la mayor participación del estudiante en el proceso de aprendizaje así personalizando su aprendizaje desarrollando un pensamiento crítico lo que lo conducirá a un aprendizaje más profundo y significativo, entonces esta metodología mejora la comprensión y retención de los conceptos matemáticos utilizados para analizar el tema de integrales definidas.

Palabras claves: Aprendizaje, Educación, Integrales, Metodología, Aula invertida.

ABSTRACT

The present research work on flipped classroom in learning definite integrals by fifth-semester students at the National University of Chimborazo stems from the need for students to have structured self-learning in topics covered in the syllabus of the integral calculus subject. In this research, learning guides and audiovisual materials (videos) were developed to teach definite integrals to fifth-semester students in the Pedagogy of Experimental Sciences Mathematics and Physics program at the National University of Chimborazo. It is a quantitative research with a non-experimental, propositional design. The topics of the integral calculus syllabus for the fifth semester were selected as the population. A bibliographic research was carried out, which allowed the incorporation of concepts such as flipped classrooms, didactic material, video scripts, and Kolb's cycle. It also details the essential topics in the subject syllabus related to the theme of definite integrals. Criteria were used to understand the reviewed concepts before their incorporation into the research work. Therefore, after applying the flipped classroom methodology to design didactic material, it can be concluded that it offers greater student participation in the learning process, thus personalizing their learning and developing critical thinking, leading to deeper and more meaningful learning. Therefore, this methodology improves the understanding and retention of mathematical concepts used to analyze the theme of definite integrals.

Keywords: Learning, Education, Integrals, Methodology, Flipped Classroom.

Firmado electrónicamente por:
MYRIAM JANNETH
TRUJILLO BRITO

Reviewed by:
Dra. Myriam Trujillo Brito, Mgs.
ENGLISH PROFESSOR
c.c. 0601823214

CAPÍTULO I

INTRODUCCION.

Mucho se hace referencia en los métodos tradicionalistas de aprendizaje de las matemáticas, con avance del tiempos podemos ver que de cierta manera ya no es lo mismo enseñar a estudiantes que tienen nuevas expectativas de aprender a resolver problemas, de aquí una pequeña interrogante, ¿Qué podría pasar si implementamos nuevas metodologías de aprendizaje de las matemáticas?, la presente investigación está enfocada en la aplicación de una metodología de aprendizaje que ayuda a los estudiantes de quinto semestre a comprender, resolver y estudiar las integrales definidas.

El aprendizaje de las matemáticas fomenta el pensamiento lógico y analítico al requerir que los estudiantes piensen de manera estructurada y secuencial, lo que demanda una metodología basada en comprensión y repetición de principios y conocimientos.

Hay que tener en cuenta que el aprendizaje de las matemáticas va a conllevar una serie de desarrollos previos y necesarios sobre los que cimentar dicho conocimiento. De la Serna, (2020). Lo que demanda estrategias pedagógicas cambiantes e innovadoras para impartir los conocimientos a los estudiantes, particularmente en el desarrollo de unidades de estudio para abordar diversos temas.

Según Sandobal Verón y Marín (2021) la implementación de Aulas invertidas es un enfoque pedagógico en el que la instrucción directa se mueve desde el espacio de aprendizaje colectivo hacia el espacio de aprendizaje individual.

De este modo, los alumnos se familiarizan, interpretan y dan sentido a los conceptos y conocimientos previos antes de la clase lo que contribuye a disminuir las dificultades comunes que se relacionan con el aprendizaje de cálculo integral.

Para Vallés Arándiga, A (1993) al acompañamiento y apoyo del docente, contribuye a reforzar a los alumnos los aprendizajes no alcanzados, y a revisar contenidos no suficientemente aprendidos

En post de brindar recursos enfocados en la complementación de la enseñanza, los estudiantes contaran con la responsabilidad de su propio aprendizaje, que les permita asimilar a un ritmo propio, de forma repetitiva si es necesario, para un aprendizaje significativo.

El objetivo del trabajo es usar la metodología del aula invertida para el aprendizaje de integrales definidas a los estudiantes de quinto de la Carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales Matemáticas y Física en la Universidad Nacional de Chimborazo.

Conforme a lo planteado se desarrolló una investigación no experimental, bibliográfica de carácter descriptivo propositivo, donde se plasma técnicas como la observación, y el uso de una ficha de observación para recolección de datos.

1.1 Antecedentes

Mediante busquedas biblograficas en relacion a la problemática de la investigacion, se encontraron trabajos que con cierta similitud contribuiran a sustentar los antecedentes del proyecto de invertigacion desarrollado.

Como nos menciona Fúneme Mateus (2019) en su trabajo titulado "El aula invertida y la construcción de conocimientos en matemáticas" destaca la aplicación del aula invertida para desarrollar clases de calculo diferencial, a primer nivel universitario, empezando con la revision de conceptos basicos de las derivadas, en donde se desarrolla un analisis a partir de material audiovisual y convivencia en entornos virtuales que permiten describir ventajas y desventajas relacionados con el progreso academico que tienen los estudiantes, permitiendo desvelar que un desarrollo mas conciso de los fundamentos del aula invertida en lo que corresponde al aprendizaje de las matematicas deriva por parte de los alumnos (p. 162).

Casillas y González (2020) realizaron la investigación experimental y de campo de corte transversal con 39 estudiantes que ingresaron de nivel superior. Para evaluar el nivel de conocimientos previos en Matemáticas, se administró una evaluación inicial compuesta por 31 ejercicios, con un promedio de 11.61, algunos de los cuales quedaron sin responder. Luego, se implementó la técnica de aula invertida, respaldada por la plataforma Moodle, con el objetivo de fortalecer las habilidades en Matemáticas. Esta metodología se desarrolló a lo largo de cuatro sesiones presenciales y dos semanas de trabajo. Al término de esta etapa, se llevó a cabo una evaluación final para evaluar los conocimientos adquiridos. Se registró un incremento en el promedio de la evaluación inicial, pasando de 11.61 a 26.3. Aunque este promedio no alcanza el nivel de aprobación, indica un progreso en el aprendizaje del estudiante mediante la estrategia empleada.

En la Pontifica Universidad Catolica del Ecuador Chipantiza Urquizo (2021), en su investigación titulada “Aplicación del aula invertida para mejorar el proceso enseñanza-aprendizaje de las matemáticas de los estudiantes del noveno año de EGB de Pelileo” se evaluó la eficacia del modelo de aula invertida en la enseñanza de matemáticas, utilizando un enfoque cuantitativo y un diseño cuasi experimental de alcance descriptivo. La muestra consistió en 65 estudiantes, divididos en un grupo de control 30 alumnos y un grupo experimental 35 estudiantes. Se validaron los instrumentos utilizados consultando a expertos en matemáticas, y se verificó la fiabilidad mediante el coeficiente Alfa de Cronbach, obteniendo un valor de 0,898. La eficacia de la metodología de aula invertida alcanzó el 85,7%, lo que sugiere su utilidad para mejorar la comprensión conceptual y los fundamentos teóricos en matemáticas. Se recomienda la implementación de esta metodología en la instrucción pedagógica.

1.2 Planteamiento del problema

Resolver problemas de cálculo integral requiere habilidades analíticas y razonamiento lógico. Los estudiantes deben ser capaces de descomponer un problema en pasos más pequeños, aplicar las reglas y técnicas adecuadas, y luego reconstruir la solución completa. Este proceso puede resultar complicado, especialmente cuando se enfrentan a problemas más complejos que requieren la aplicación de múltiples conceptos y estrategias.

En otro caso en la Universidad Central Del Ecuador. Aguinaga (2019) en su trabajo titulado "Propuesta de actividades mediante la metodología ABP para la conceptualización del cálculo integral" menciona que es de conocimiento público que entre los estudiantes en su gran mayoría, el escuchar el nombre de la materia Matemática y aún más Cálculo Integra, genera en ellos resistencia al aprendizaje de la materia, debido a que siempre han aprendido a realizar operaciones memorísticas, sin tener claridad de los conceptos, propiedades y utilidad, así como su aplicación en la resolución de problemas de la vida diaria; por esta razón se ha generado una gran preocupación por la enseñanza y el aprendizaje de esta ciencia y se buscan metodologías que ayuden a solucionar este problema (p. 14).

Dentro de los procesos educativos existen ciertos inconvenientes al momento de aprender nuevos conceptos matemáticos esto genera ciertas resistencias de parte del estudiante al querer asimilar procesos nuevos para resolver ejercicios de los temas de cálculo integral, las metodologías de enseñanza pueden ayudar a una mejor comprensión de las temáticas nuevas que se abordan al empezar un curso de cálculo.

En su trabajo de investigación Zhang (2003) indica que es común que muchos estudiantes no logren comprender completamente las ideas relacionadas con el Cálculo en su primer encuentro con ellas, y que perciben esta disciplina como abstracta, monótona y desafiante de dominar. Según la investigación, las estrategias de enseñanza que se centran mayormente en el profesor tienen desventajas, ya que no promueven un ambiente de aprendizaje activo. Esto provoca una pérdida de interés por parte de los estudiantes y, en la mayoría de los casos, resulta en un aprendizaje superficial basado en la memorización y la reproducción. Zhang, quien recientemente estuvo estudiando en la Universidad de Sydney, Australia, tiene la intención de regresar a China con el propósito de mejorar la calidad de la enseñanza del Cálculo, adoptando enfoques pedagógicos que pongan más énfasis en el estudiante (p. 102).

Para Llorens Fuster y Prat Villar (2015) el comienzo de los problemas cabe situarlo, evidentemente, en el mismo orden de exposición de los temas relativos al cálculo integral y en la insistencia que en ellos se hace.

Los alumnos generan resistencia al querer asimilar procesos nuevos, y no le permiten un avance significativo de asimilación, comprensión y manejo del tema.

Algunos estudiantes pueden presentar dificultades para visualizar y comprender las relaciones espaciales entre las funciones y las áreas que representan. La interpretación de gráficos y la comprensión de las propiedades geométricas asociadas pueden ser un desafío, que sitúa la idea de complejidad de la materia.

Al abordar y reflexionar sobre estas problemáticas, los educadores y estudiantes pueden identificar estrategias y enfoques que promuevan un aprendizaje más efectivo del cálculo integral.

En consecuencia, la inclusión de ejemplos y aplicaciones prácticas como la clase invertida, de fácil acceso permiten cubrir vacíos en el proceso de enseñanza y aprendizaje, convirtiéndola en una herramienta practica de acompañamiento, repaso y fortalecimiento de procesos para la solución de problemáticas de cálculo integral.

1.2.1 Formulación del problema

¿Cómo usar la metodología del aula invertida para el aprendizaje de integrales definidas a los estudiantes de quinto semestre?

1.2.2 Preguntas directrices

- ¿Cuáles son los contenidos sobre la integral definida que constan en el silabo de la asignatura de cálculo integral de quinto semestre?
- ¿Es posible aplicar la metodología del aula invertida para el desarrollo de material didáctico para el aprendizaje del tema de integrales definidas definida en los estudiantes de quinto semestre?
- ¿Qué fortalezas presenta la metodología del aula invertida aplicada en el aprendizaje de la matemática?

1.3 Justificación

La metodología de aulas invertidas, también conocida como flipped classroom, ha demostrado ser una estrategia eficaz para mejorar el aprendizaje y la comprensión de los estudiantes en diversas áreas académicas. Al aplicar este enfoque al aprendizaje de cálculo integral, se pueden obtener varios beneficios significativos.

La metodología de aula invertida involucra a los estudiantes en su propia educación y capacitación acorde a los ritmos de aprendizaje de cada uno, mediante el uso adecuado de la tecnología puede ser una gran herramienta una vez que se implementa en el entorno educativo.

Promueve la autonomía y el aprendizaje activo, en un aula invertida, los estudiantes tienen acceso previo al material de estudio, como videos explicativos, lecturas o recursos en línea, antes de la clase, esto les permite adquirir los conocimientos básicos en su propio tiempo y ritmo.

Durante el tiempo de clase, los estudiantes pueden participar activamente en actividades prácticas, resolución de problemas y discusiones colaborativas.

Dado la importancia y aportes del aula invertida en el proceso de dominio de los procedimientos matemáticos, desarrollo de habilidades cognitivas superiores, como el razonamiento lógico en la resolución de problemas de cálculo integral queda justificada la realización del trabajo de investigación.

1.4 Objetivos

1.4.1 General

- Usar la metodología del aula invertida para el aprendizaje de integrales definidas a los estudiantes de quinto de la Carrera de Pedagogía de las ciencias experimentales Matemáticas y Física en la Universidad Nacional de Chimborazo.

1.4.2 Específicos

- Identificar los contenidos de la integral definida en el silabo de la asignatura de quinto semestre.
- Describir las fortalezas de la metodología del aula invertida aplicada en el aprendizaje de la matemática.
- Elaborar Guías de Aprendizaje y material audiovisual (videos) para su utilización como recurso didáctico dentro de la Metodología de aula invertida, para la enseñanza de las integrales definidas.

CAPÍTULO II

MARCO TEÓRICO

2.1 Estado del arte

En la presente investigación se necesita fundamentar aportes acerca de la metodología de aprendizaje de aula invertida, material didáctico y las integrales definidas según.

Los estudiantes nacidos en la era digital, los estudiantes están constantemente expuestos a usuarios de tecnología que tienen acceso a la información en cualquier momento y en cualquier lugar. Esta nueva situación de acceso instantáneo e intercambio de información afecta al proceso de enseñanza y aprendizaje y al sistema educativo en su conjunto, por lo que es importante recordar que la tecnología debe utilizarse como un recurso adaptado a las necesidades individuales, no como una herramienta. un fin en sí mismo (González, 2020, p. 84).

Permite o implica que los estudiantes revisen material didáctico Documentos PDF audios vídeos presentaciones fuera de las aulas de clase que los estudiantes contenidos que son presentados por los docentes fuera de las establecimiento educativo para que al momento de desarrollar la clase en días posteriores dentro se pueda desarrollar la problemática los temas y dar respuesta a las preguntas que los estudiantes hayan generado durante la revisión del presente material didáctico como una forma de reforzar el conocimiento, en este caso el docente pasa de ser un proveedor de información y toma el rol de facilitador de fuentes de información y del aprendizaje (González, 2020, pp. 75-91).

Para Abad (2020) nos menciona que, durante los últimos años, las revisiones sistemáticas han impulsado el debate sobre el conocimiento científico aplicado en el estudio de un área de investigación particular. De este modo, esta herramienta de investigación secundaria puede emplearse para recopilar de manera sintetizada información bibliográfica sobre las experiencias, recursos y tendencias más relevantes en la práctica universitaria. La adopción de una metodología activa concuerda con la urgencia de lograr un aprendizaje significativo para que los futuros profesionales puedan adecuarse a la complejidad de la sociedad actual. (p. 80).

El uso de material didáctico en la implementación de la metodología del aula invertida es considerado como un recurso importante para la transmisión de información que beneficia al aprendizaje de los estudiantes en un espacio fuera de clases para poder interactuar en el salón de clases y fortalecer sus conocimientos.

En el desarrollo de clases por un docente de matemáticas es importante que los recursos sean adecuados para el fortalecimiento de los conocimientos en los estudiantes por esto según:

Según Uicab (2009) dada esta necesidad, las diversas perspectivas y creencias sobre qué enseñar, cómo enseñar y cómo aprender matemáticas generan diferentes enfoques entre los profesores interesados en mejorar la enseñanza de esta materia, tanto dentro como fuera del aula. Por lo tanto, es común que los docentes utilicen recursos didácticos para respaldar su enseñanza, basándose en lo que consideran la mejor manera de enseñar y aprender matemáticas. Entre estos recursos se encuentran los manipulativos, que pueden dividirse en tangibles e intangibles, ambos con un impacto significativo en el proceso de aprendizaje de las matemáticas. (p. 1008).

Los docentes consideran que el material didáctico es un apoyo fundamental para la elaboración de sus clases dentro y fuera del aula, lo que permite a los docentes enseñar y a los estudiantes aprender con más recursos pedagógicos.

Según Uicab (2009) las memorizaciones forzadas y las amenazas físicas dejaron de ser métodos viables desde hace varios años dando paso a la estimulación de los sentidos y la imaginación con los recursos que se implementan en cada clase que el docente prepare para sus estudiantes, la estructuración de los ambientes de aprendizaje nos menciona hola qué hay que llevar a estudiante progresivamente a la construcción de conceptos y procedimientos, y al dominio matemático en consonancia con el conocí miento matemático formal esto asumiría una postura de orientación a la enseñanza y aprendizaje este situada en un continuo que vaya de lo manipulativo práctico y concreto hasta lo esencialmente simbólico abstracto y formal (p. 1008).

El estudio del conocimiento matemático plantea al profesor una serie de dilemas metodológicos que pueden influir en la elección de los materiales didácticos. Por ejemplo, en la actualidad surgen preguntas sobre la idoneidad de los recursos que el docente proporciona a los alumnos para un tema específico. Además, se debe considerar cuál sería el material didáctico más adecuado que un profesor podría sugerir o hacer disponible para que los estudiantes lo revisen, y determinar si el uso de estos materiales está generando algún tipo de aprendizaje.

De cierto modo el lenguaje y la práctica escolar pueden llevar a confundir entre las propiedades correctas del material didáctico los objetos matemáticos que modelizan dichas propiedades ello puede impregnar a los objetos matemáticos de una connotaciones tangibles y visuales de las que progresivamente los alumnos deben desprenderse en los niveles superiores de enseñanza (Uicab, 2009).

2.2 Método de Pólya

2.2.1 Definición

Según Ramos (2017) define que el método de Pólya contribuye a la enseñanza de la matemática ya que causa en el estudiante capacidad, habilidad y desarrollo del conocimiento para comprender y resolver problemas matemáticos (p. 7).

El método de Pólya es un recurso importante para el desarrollo o resolución de problemas matemáticos elaborando una serie de pasos que permitan su comprensión.

2.2.2 Historia del método de Pólya

El desarrollar ejercicios fundamenta la materia que se revisa con anterioridad en las clases.

Según Ramos (2017) menciona que George Pólya, profesor, matemático y destacado docente de Hungría, comenzó con un gran interés en encontrar formas adecuadas de desarrollar la capacidad de los estudiantes para resolver problemas matemáticos. para ellos, los estudiantes, para resolver problemas de matemáticas (p. 7).

Este enfoque, que comenzó como un programa de estudios de género, desde entonces ha sido ampliamente aceptado por los educadores de matemáticas.

2.2.3 Estrategias de Pólya en el aprendizaje matemático

Los métodos o pasos son estrategias, métodos de aprendizaje útiles para la solución de problemas matemáticos porque refuerza las habilidades y el saber matemático lo cual se desarrolla en 4 etapas (Barrón et al., 2021).

Entender el problema.

Leer cuidadosamente el enunciado del problema y asegurarse de entender lo que se está pidiendo.

Configurar un plan.

Considerar diferentes enfoques y estrategias para resolver el problema. Pólya sugiere técnicas como hacer un dibujo, usar ejemplos concretos, buscar patrones, trabajar hacia atrás y reformular el problema.

Ejecutar el plan.

Llevar a cabo el plan ideado de manera organizada y con precisión.

Mirar hacia atrás.

Revisar la solución obtenida, verificar si es válida y si resuelve el problema de manera efectiva. También es importante aprender de la solución y reflexionar sobre el proceso de resolución

El método de Pólya se ha convertido en una herramienta útil para estudiantes y profesionales en matemáticas y otras disciplinas, ya que proporciona una estructura para abordar problemas de manera efectiva y sistemática (Barrón et al., 2021).

2.3 Ciclo de Kolb

La teoría de aprendizaje de Kolb se toma como referencia para generar un modelo de aprendizaje basado en la experiencia que se considera el ciclo de Kolb.

El ciclo de Kolb, también conocido como el modelo de aprendizaje experiencial de Kolb, es un marco teórico que describe cómo las personas aprenden a través de la experiencia.

Fue desarrollado por David A. Kolb, un psicólogo y educador estadounidense, en la década de 1970. Este modelo se basa en la idea de que el aprendizaje es un proceso activo que implica una interacción constante entre la experiencia concreta, la observación reflexiva, la conceptualización abstracta y la experimentación activa (Defaz Taipe, 2020).

El ciclo de Kolb es una serie de pasos de una clase que pretende una integración y adaptación constantes de nuevas experiencias y conocimientos de los estudiantes en el tiempo de clases.

2.3.1 Ciclo experiencial de Kolb

El ciclo de aprendizaje experiencial tiene cuatro etapas y aunque éstas se presentan en un orden específico, el aprendizaje en realidad puede comenzar en cualquier etapa del ciclo.

Este método educativo ofrece una serie de ventajas significativas para los involucrados, ya que equilibra el aprendizaje emocional, conductual y cognitivo. Además, se caracteriza por ser un proceso inductivo, lo que implica que los participantes deducen sus propias conclusiones a partir de la experiencia y el contenido, lo que facilita la aplicación directa de lo aprendido a situaciones del mundo real. Un taller o diseño de capacitación completo debe incluir las siguientes cuatro etapas para cerrar el ciclo de aprendizaje: Experiencia Concreta, Observación Reflexiva, Conceptualización Abstracta y Experimentación Activa (Rodríguez Cepeda, 2018).

Este ciclo experiencial de Kolb se considera un marco teórico valioso para diseñar experiencias educativas efectivas y fomentar el aprendizaje significativo a través de la integración activa de la experiencia, la reflexión, la conceptualización y la aplicación.

2.3.1.1 Fases de ciclo experiencial de Kolb

Para el correcto desarrollo de una metodología se toma en cuenta pasos como según Rodríguez Cepeda (2018), menciona que “estas etapas son fundamentales para entender cómo las personas aprenden a través de la experiencia y cómo pueden aplicar ese aprendizaje en nuevas situaciones. Las cuatro etapas del ciclo experiencial de Kolb son las siguientes” (p. 54).

- **Experiencia concreta (EC)**

  Esta etapa implica tener una experiencia práctica directa o una actividad concreta. Pueden ser experiencias de la vida real, situaciones de trabajo, interacciones sociales, etc. Es la base para el proceso de aprendizaje y proporciona datos y hechos específicos sobre la experiencia.

- **Observación Reflexiva (OR)**

  Después de la experiencia, los individuos reflexionan sobre lo que han vivido. Analizan y consideran sus observaciones y reacciones emocionales frente a la experiencia. La reflexión les permite examinar y comprender la experiencia desde diferentes perspectivas y puntos de vista.
- **Conceptualización Abstracta (CA)**

  Los individuos intentan desarrollar conceptos y generalizaciones a partir de sus observaciones y reflexiones. Buscan entender patrones, establecer conexiones y crear teorías abstractas que expliquen la experiencia. Es el proceso de conceptualización y formación de ideas sobre la experiencia.
- **Experimentación Activa (EA)**

  Los individuos aplican los conceptos y teorías que han desarrollado en la etapa de conceptualización abstracta. Utilizan lo aprendido para planificar nuevas acciones o situaciones. La experimentación activa implica probar nuevas ideas y enfoques en situaciones prácticas, lo que lleva a una nueva experiencia concreta.

Después de la etapa de experimentación activa, el ciclo vuelve a comenzar, utilizando la nueva experiencia como punto de partida para la reflexión y la conceptualización en futuros ciclos de aprendizaje.

2.3.2 Plan de clases

2.3.2.1 ¿Qué es plan de clases?

En la formación docente el realizar una planificación corresponde a organizar los tiempos dentro de un aula de clases que permita desarrollar actividades individuales o colectivas.

El plan de clases es un género que refleja las competencias adquiridas en el transcurso del proceso de formación docente, que constituye a una síntesis del saber pedagógico en la que se articulan conocimientos disciplinarios con una perspectiva didáctica que señala las directrices de cómo se debe asumir la enseñanza de ciertos contenidos (Figueroa Sandoval et al., 2016).

Es un instrumento que diseña el docente en el que desarrolla sus intenciones educativas, de carácter académico-administrativas que pretende compartir con sus estudiantes en un determinado ciclo académico (Aburto, 2021).

El plan de clases instrumento que nos ayuda a organizar los tiempos para las actividades que se desarrollan en clases y esquematizar los temas que se van a revisar con ayuda de un docente.

2.3.2.2 Pasos para elaborar un plan de clases

El enfoque de aula invertida es una estrategia pedagógica en la que los estudiantes revisan el contenido antes de la clase y luego utilizan el tiempo en el aula para actividades interactivas y de aplicación del conocimiento.

Según Saphier, Haley-Speca, & Gower (2007) en su trabajo de investigación nos menciona que son necesarios los siguientes aspectos para la elaboración de una planificación de clases con los temas que se van a analizar en clases (p. 34).

- Identificar los objetivos de aprendizaje.

Define claramente lo que pretende que el estudiante aprenda en la sesión de clases, esto debe estar alineado con el currículo y las metas educativas.

- Seleccionar material para la preparación previa.

Recolecta los recursos de estudio que los estudiantes deben revisar antes de la clase. Pueden ser videos, lecturas, podcasts, presentaciones, o cualquier material que presente el contenido central de la lección.

- Crear el material para revisión previa.

Diseña o selecciona los recursos educativos que los estudiantes utilizarán para aprender por adelantado. Asegúrate de que sean claros, informativos y adecuados para el nivel y la comprensión de tus estudiantes.

- Establecer actividades preclase.

Diseña preguntas, ejercicios o tareas relacionadas con el material de preparación previa. Estas actividades deben fomentar la reflexión, la comprensión y la aplicación del contenido.

- Planifica la interacción en el aula.

Decide cómo utilizarás el tiempo en el aula para actividades interactivas. Pueden incluir discusiones en grupo, resolución de problemas, debates, proyectos colaborativos, demostraciones, juegos de roles, entre otros.

- Elabora actividades en clase.

Diseña las actividades específicas que los estudiantes realizarán en el aula para aplicar y profundizar en el conocimiento adquirido previamente. Estas actividades deben estar alineadas con los objetivos de aprendizaje.

- Prepara material adicional.

Prepara cualquier material adicional que necesitarás durante la clase, como presentaciones, ejemplos, ejercicios prácticos o herramientas tecnológicas.

- Organiza la secuencia de clase.

Establece una secuencia lógica para la clase que incluya la introducción al tema, la revisión del material de preparación, la aplicación del conocimiento y la conclusión.

- Incorpora tecnología.

Si planeas utilizar tecnología, asegúrate de que esté lista y funcione adecuadamente para respaldar las actividades de la clase.

- Evaluar el desempeño de los estudiantes.

Diseña estrategias de evaluación que permitan medir el aprendizaje de los estudiantes, tanto en la preparación previa como en las actividades realizadas en el aula.

- Reflexionar sobre la planificación.

Al final de la clase, reflexiona sobre lo que funcionó bien y lo que no. Utiliza esta retroalimentación para ajustar y mejorar futuras sesiones de aula invertida.

2.4 Metodología del aula invertida

2.4.1 Reseña histórica del aula invertida

El aula invertida es considerada una metodología de aprendizaje - enseñanza que los docentes utilizan para ayudar a los estudiantes a reconocer conceptos, definiciones, su aprendizaje partiendo de eso Martínez (2015) cito que:

El concepto de aula invertida, inicialmente introducido por Lage, Platt y Treglia (2000) como "inverted classroom" (IC), se utilizó para describir una estrategia de enseñanza implementada en una materia específica (Economía), aunque se aplica a técnicas similares en diversas disciplinas donde el docente requiere que los estudiantes se familiaricen con temas específicos antes de la clase (Talbert, 2012; Tucker, 2012). La característica distintiva del aula invertida es el empleo de tecnología multimedia (videoconferencias, presentaciones) para acceder al material de apoyo fuera del aula, lo que lo sitúa en la categoría de modelos educativos mediados por la tecnología. Bergmann y Sams (2012) popularizaron este modelo bajo el nombre de "flipped classroom model" (FCM) o aula volteada, término más comúnmente usado en la educación primaria y secundaria en Estados Unidos. (Coufal, 2014; Talbert, 2014). En este documento, se utilizará indistintamente el término "aula invertida" o "aula volteada", ya que ambos son válidos (p. 143).

Mientras que otros autores dicen:

El aula invertida o modelo invertido de aprendizaje, como su nombre lo indica, pretende invertir los momentos y roles de la enseñanza tradicional, donde la cátedra, habitualmente impartida por el profesor, pueda ser atendida en horas extra-clase por el estudiante mediante herramientas multimedia; de manera que las actividades de práctica, usualmente asignadas para el hogar, puedan ser ejecutadas en el aula a través de métodos interactivos de trabajo colaborativo, aprendizaje basado en problemas y realización de proyectos (Martínez, 2015, pp. 143-160).

2.4.2 Definición

Una de las contribuciones más significativas de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) al ámbito educativo, especialmente en los últimos años con la proliferación de aplicaciones y herramientas asociadas a la Web 2.0, ha sido la diversidad de oportunidades que han surgido para el aprendizaje formal e informal en entornos abiertos y flexibles. El enfoque tradicional, que predomina en nuestra sociedad educativa, implica que los estudiantes asistan a clases impartidas por los profesores en las instituciones y luego completen las tareas asignadas durante la clase (Aguilera, 2017).

Según Aguilera Ruiz et al. (2017) en su investigación, se describe el aula invertida o "flipped classroom" como un enfoque de enseñanza que busca que los estudiantes adopten un papel más participativo en su propio proceso de aprendizaje en comparación con el modelo tradicional. Bajo este método, los estudiantes se encargan de revisar de manera autónoma los conceptos teóricos proporcionados por el docente, mientras que el tiempo en clase se destina a resolver dudas, realizar prácticas y participar en debates relevantes sobre los temas estudiados de antemano. (p. 264).

Según su investigación Rivera (2019), considera que la virtualización incluye una proyección formativa de escenarios tecnológicos donde el alumnado y el docente desarrollar su trabajo, que incluyen todas las herramientas, documentos y otros artefactos que se pueden encontrar en el escenario físico, pero además también tienen las características socio-culturales para ese trabajo (p. 17).

2.4.3 Ambientes flexibles

Ahora los estudiantes tienen la libertad de decidir cuándo y dónde aprenden, lo que les brinda una mayor flexibilidad para cumplir con sus expectativas de ritmo de aprendizaje. Los profesores toleran y aceptan el posible desorden que pueda surgir durante la clase. Se implementan evaluaciones adecuadas que evalúan el nivel de comprensión de manera significativa tanto para los estudiantes como para los profesores.

2.4.4 Cultura de aprendizaje

Se observa una intencional transformación en la forma de abordar el aprendizaje, pasando de una clase centrada en el profesor a una centrada en el estudiante. El tiempo en el aula se destina a explorar en profundidad los temas, generar oportunidades de aprendizaje más enriquecedoras y maximizar las interacciones cara a cara para garantizar la comprensión y síntesis del material.

2.4.5 Contenido intencional

Para elaborar un diseño instruccional adecuado, es necesario plantearse la pregunta: ¿Qué contenido puede enseñarse en el aula y qué recursos estarán disponibles para que los estudiantes los exploren por sí mismos? Responder esta pregunta es crucial para integrar estrategias o métodos de aprendizaje según el nivel y la materia, tales como el aprendizaje basado en problemas, el aprendizaje por dominio, el método socrático, entre otros.

2.4.6 Docente profesional

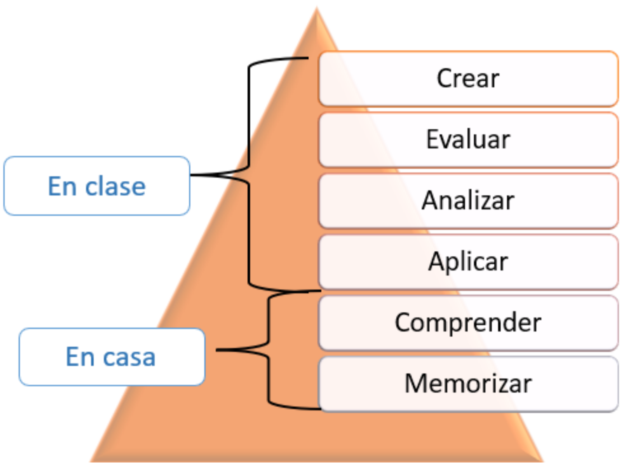
En este enfoque, los profesores altamente capacitados adquieren una importancia aún mayor. Deben determinar qué aspectos de la instrucción necesitan ser modificados y cómo, además de identificar formas de aprovechar al máximo el tiempo de interacción directa. Durante las clases, es fundamental que observen y ofrezcan retroalimentación de manera inmediata, así como evaluar de forma continua el progreso de los estudiantes.

2.4.7 Rol del estudiante en la metodología del aula invertida

Es fundamental conocer las características de la metodología para el aprendizaje utilizada como propuesta innovadora, porque nos permite una visión más clara de las potencialidades que brinda en comparación con las clases que se imparten de forma regular.

Para Merla & Yáñez (2016) Los estudiantes tienen la responsabilidad de su propio aprendizaje al utilizar los materiales disponibles en línea, plantear preguntas pertinentes a los docentes para aclarar los contenidos y complementar las actividades en clase, así como completar todas las tareas dentro y fuera del aula. Además, deben seguir las indicaciones proporcionadas por el profesor y elegir a los compañeros de equipo para el trabajo colaborativo. (p. 76).

Figura 1
Fases del Aula Invertida



Fuente: La siguiente imagen nos menciona el orden de las fases del aula invertida y los ambientes.

Considero que la implementación de una nueva metodología de enseñanza favorecerá el aprendizaje debido a que los estudiantes tendrán conocimientos previos antes de ir a clases de forma presencial, lo que agiliza al docente socializar los temas y generar debates entre los estudiantes acerca del tema nuevo que se tratara en la clase, fortalece el autoaprendizaje de las asignaturas.

2.4.8 Ventajas del aula invertida

Según Merla & Yáñez (2016) La elección de implementar la estrategia pedagógica del aula invertida en la enseñanza proporciona diversas ventajas tanto para los profesores como para los alumnos, lo que generalmente conduce a cambios positivos tantos académicos como personales.

- Favorece a los estudiantes con múltiples responsabilidades o que, por diversas razones, no pueden asistir a clase, ya que el contenido principal se distribuye en línea.
- Apoya a los estudiantes menos avanzados al dirigir la atención hacia aquellos que necesitan más ayuda, sin ignorar a los estudiantes más avanzados.
- Contribuye al éxito de todos los estudiantes al permitir una interacción directa entre el profesor y el alumno para aclarar dudas y abordar necesidades específicas de aprendizaje.
- Permite que los estudiantes trabajen a su propio ritmo.
- Promueve una mayor interacción tanto entre el profesor y los estudiantes como entre los propios estudiantes.
- Facilita el establecimiento de relaciones más sólidas entre el profesor y los alumnos.
- Ayuda a identificar las diferencias de aprendizaje reales entre los estudiantes.
- El manejo de la clase es diferente en cuanto a la disciplina, los alumnos están ocupados todo el tiempo, no hay lugar para el aburrimiento.
- Cambia el enfoque de las conversaciones con los padres, centrándose en posibles problemas de aprendizaje y asuntos personales, en lugar de cuestiones de comportamiento.
- Educa a los padres, ya que el material puede ser accesible para aquellos que estén interesados.
- Fomenta la transparencia en cuanto a las actividades escolares realizadas.
- Permite suplir a los docentes ausentes mediante el acceso a materiales digitales, lo que posibilita que los estudiantes reciban la instrucción del docente, aunque no esté presente.

2.4.9 Desventajas del aula invertida

Como se sabe, así como una metodología de aprendizaje tiene ventajas también tiene desventajas que son las siguientes:

- Existe la posibilidad de que el estudiante se muestre estoico a aprender.

- Que el estudiante no cuente con los recursos necesarios o adecuados para el autoaprendizaje.
- Debilidad de habilidades comunicativas y de manejo de las TIC, por parte del docente facilitador de la catedra.
- Puede crear sentimiento de frustración si el estudiante no es guiado de manera oportuna.
- La docente seria ausente pero su falta es esencial en el aprendizaje.
- Requiere más esfuerzo por parte del estudiante (Cedeño Escobar y Vigueras Moreno, 2020, pp. 878-897).

Según Vigueras (2020) nos dice en su trabajo de investigación "En la actualidad, se ha evidenciado a través de diversos estudios que la motivación de los estudiantes juega un papel fundamental en el proceso de enseñanza-aprendizaje, convirtiéndose en un factor de gran relevancia que debe ser considerado en los esfuerzos por mejorar la calidad de la enseñanza" (p. 9).

En su trabajo de investigación Cedeño Escobar y Vigueras Moreno (2020), dice la motivación generada por la estrategia del aula invertida se origina en el hecho de que el alumno se convierte en el protagonista de su propio proceso de aprendizaje. En este sentido, el interés por explorar los contenidos se ve impulsado por la posibilidad de experimentar en entornos diferentes a los convencionales del aula, con una amplia gama de recursos multimedia. Esto otorga al estudiante la libertad para establecer su propio ritmo de aprendizaje. (pp. 778-897).

2.4.10 Metodología del aula invertida en la enseñanza de las matemáticas

Con este enfoque educativo, los docentes buscan promover la implicación de los estudiantes en un proceso de aprendizaje centrado en actividades o estrategias como cuestionamientos, debates o ejercicios prácticos, con el objetivo de estimular y enriquecer la exploración, integración y aplicación de conceptos durante las clases.

Según Ramón (2020) la estrategia del aula invertida resalta la importancia de invertir el enfoque convencional del proceso educativo, donde el estudiante primero adquiere conocimientos teóricos de manera autónoma a través de diversos recursos como redes sociales, grabaciones de clases, enlaces web, plataformas interactivas y textos digitales. En el entorno físico del aula, se enfatiza en el refuerzo conceptual, la discusión de ideas, la realización de actividades interactivas y colaborativas, así como en las tutorías con el profesor. (pág. 4).

2.5 ¿Qué es material didáctico?

2.5.1 Definición de material didáctico

Los materiales didácticos son los elementos que empleamos los docentes para facilitar y conducir el aprendizaje de nuestros/as alumnos/as (libros, carteles, mapas, fotos, láminas, videos, software, También consideramos materiales didácticos a aquellos materiales y equipos que nos ayudan a presentar y desarrollar los contenidos y a que los/as alumnos/as trabajen con ellos para la construcción de los aprendizajes significativos.

Según Henao (2012) en su investigación, se plantea que no hay una definición única de lo que constituye un recurso didáctico. En conclusión, se entiende por material didáctico cualquier elemento que se utilice con un propósito educativo específico o para facilitar el desarrollo de actividades formativas en un contexto educativo determinado. (pág. 24).

2.5.2 Clasificación del material didáctico

Como menciona Gallego Henao & Manrique Orozco (2013), de entre las diferentes clasificaciones de materiales didácticos, la más adecuada me parece la siguiente:

- Recursos impresos: incluyen libros de texto, lectura, consulta (como diccionarios y enciclopedias), atlas, monografías, folletos, revistas, boletines y guías.
- Recursos de áreas específicas: comprenden mapas de pared, materiales de laboratorio, juegos educativos, aros, pelotas, potros, plintos, juegos de simulación, maquetas, acuarios, terrarios, herbarios, bloques lógicos y murales.
- Materiales para el trabajo práctico: abarcan cuadernos de trabajo, carpetas, fichas, lápices, colores y bolígrafos.
- Recursos del docente: incluyen leyes, disposiciones oficiales, resoluciones, planes de estudio, guías didácticas, bibliografías y ejemplos de programaciones y unidades didácticas.

Los diferentes materiales didácticos que se utilizan en la educación son importantes para el desarrollo de sus conocimientos (pág. 104).

2.5.3 Características del material didáctico

Según Murillo (2017) en su trabajo de investigación menciona las siguientes características.

- Flexibilidad permiten la personalización y modificación de los contenidos a tratar según las necesidades específicas.
- Adaptabilidad su capacidad para ajustarse a diferentes contextos educativos, estrategias didácticas y necesidades de los estudiantes.
- Facilidad de manejo considera si es manipulable por profesores y estudiantes, si requiere de conocimientos especializados.
- Uso individual o grupal evalúa si puede ser utilizado por una sola persona, en pequeños grupos o en grupos grandes.

- Fomento de la utilización de otros recursos (como fichas o diccionarios) y la realización de actividades complementarias, tanto de manera individual como en grupos colaborativos

Proporcionar información. Prácticamente todos los medios didácticos proporcionan explícitamente información: libros, videos, programas informáticos (p. 3).

2.6 Integral definida

2.6.1 Contenidos de la integral definida en el silabo de quinto semestre

2.1 Sumatorias

2.1.1 Sumas superiores y sumas inferiores – Propiedades

2.1.2 Cálculo de áreas en una región plana mediante sumatorias – Partición intervalos

2.1.3 Aproximación del área de una región por rectángulos

2.2 Integral Definida

2.2.1 Integral definida – Propiedades y teorema

2.2.2 Calculo integral definida

2.2.3 El teorema fundamental del calculo

2.3 Cálculos de áreas 1

2.3.1 Áreas de regiones planas.

2.3.2 Cálculo del área cuando las ecuaciones de la curva se dan en forma paramétrica

2.3.3 Representación geométrica de una integral

2.4 Cálculos de áreas 2

2.4.1 Áreas de superficies limitadas por curvas planas (Coordenadas rectangulares y polares)

2.4.2 Volumen de solidos de revolución

2.4.3 Área de una superficie de revolución - Longitud de arco

2.5 Integral aproximada

2.5.1 Método de trapecios

2.5.2 Método de Simpson

2.5.3 Ejercicios.

2.6 Aplicaciones de la integral.

2.6.1 Longitud de arco de la grafica

2.6.2 Centro de masa de una barra y lámina

2.6.3 Centroide de una región plana

2.6.2 Definiciones sumatorias

Una sumatoria, está representada por el símbolo griego sigma (∑), es una forma de expresar la adición de una secuencia de términos. Esta notación es fundamental en matemáticas y se utiliza para sumar una serie de números o expresiones.

La expresión general de la sumatoria es:

$$\sum_{i=n_1}^{n} X_i = n$$

Donde:

i es la variable de la sumatoria que toma valores desde n_1 hasta n.
$n_1$es el primer valor de i.
n es el último valor de i.
X_i es la expresión que se suma para cada valor de i.

2.6.2.1 Aproximación del área

Como describe Medkov (1977) en su libro asumimos que $f(x)$ es una función continua y no negativa definida en el intervalo cerrado $[a, b]$, si queremos aproximar el área A delimitada por $f(x)$ arriba, el eje abajo, la línea $x = a$ a la izquierda, y la línea $x = b$ a la derecha (p. 450)

Definición

Nos mención (Cuorant y Fritz, 2017) Un conjunto de puntos $P = \{x_i\}$ por $i = 1,2,3 \dots n$ con $a = x_0 < x_1 < x_2 <, \dots < x_n = b$, que divide el intervalo $[a, b]$ en subintervalos de la forma $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, … $[x_{n-1}, x_n]$ se llama una partición de $[a, b]$. Si todos los subintervalos tienen la misma anchura, el conjunto de puntos forma una partición regular del intervalo $[a, b]$.

2.6.2.2 Aproximaciones sumas inferiores

En cada subintervalo $[x_{n-1}, x_n]$ $(para\ i = 1,2,3 \dots n)$, construya un rectángulo con anchura Δx y altura igual a $f(x_{i-1})$, que es el valor de la función en el punto del extremo izquierdo del subintervalo. Entonces el área de este rectángulo es $f(x_{i-1})\Delta x$. Al sumar las áreas de todos estos rectángulos, obtenemos un valor aproximado de A.

Tomar en cuenta para calcular la anchura del rectángulo $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.

Utilizamos la notación S_i para denotar que se trata de una aproximación del punto del extremo izquierdo de A utilizando n subintervalos.

$$A \approx S_i = f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x +, \dots . + f(x_{n-1})\Delta x.$$

$$A \approx \sum_{i=0}^{n} f(x_{i-1}) * \Delta x$$

2.6.2.3 Aproximaciones sumas superiores

Construir un rectángulo en cada subintervalo $[x_{n-1}, x_n]$, solo que esta vez la altura del rectángulo está determinada por el valor de la función $f(x_i)$, en el punto del extremo derecho del subintervalo.

Tomar en cuenta para calcular la anchura del rectángulo $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.

Entonces, el área de cada rectángulo es $f(x_i)\Delta x$ y la aproximación para A está dada por

$$A \approx S_p = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x +, \dots . + f(x_n)\Delta x.$$

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i) * \Delta x$$

La notación S_p indica que se trata de una aproximación en el punto del extremo derecho de A.

2.6.2.4 Aproximación suma puntos medios

La aproximación de áreas mediante el método del punto medio es una técnica numérica utilizada en cálculo para estimar el área bajo una curva o una función. Esta técnica se basa en dividir el área en subintervalos y calcular el valor de la función en el punto medio de cada subintervalo. Luego, se multiplica este valor por el ancho del subintervalo y se suma todas estas áreas de rectángulos para obtener una aproximación del área bajo la curva.

Tomar en cuenta para calcular la anchura del rectángulo $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.

La fórmula general para calcular la aproximación del área mediante el método del punto medio es:

Entonces, el área de cada rectángulo es $f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)\Delta x$ y la aproximación para A está dada por.

$$A \approx S_p = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x +, \dots . + f(x_n)\Delta x.$$

$$A_{Pm} = \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) * (\Delta x)$$

2.6.3 Definición de integral definida

Dada una función $f(x)$ y un Interval $[a, b]$, la integral definida es igual al área limitada ente la gráfica $f(x)$, el eje de las abscisas y las rectas verticales $x = a \ y \ x = b$.

> Según Gil (2005) expresa que sus importantes aplicaciones hacen a la integral definida una herramienta fundamental en matemáticas y las demás disciplinas. La relación entre las integrales definidas e integrales indefinidas queda establecida en los resultados importantes en el análisis matemático del Teorema fundamental de Barrow (p. 7).

La integral definida se representa por:

$$\int_a^b f(x)dx$$

Donde

- $\int$ Es el signo de integración.
- a es el límite inferior de la integración.
- b es el límite superior de la integración
- $f(x)$ es el integrando o función a integrar
- dx es diferencial de x, e indica cual es la variable de la función que se integra.

2.6.3.1 Propiedades de la integral definida

Según Muñoz (2009) en su documento de investigación dice sean f y g dos funciones integrables en [a, b], entonces se verifica las siguientes proposiciones (p. 51).

Proposición 1:
El valor que tiene como resultado la integral definida una vez que se cambie o se permuten los valores de límites de integración el signo cambia.

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

Proposición 2:
Si los limites definidos en la integral definida coinciden, en este caso el valor del resultado será 0

$$\int_a^b f(x)dx = 0$$

Proposición 3:

Si c se considera como un punto interior dentro del intervalo [a, b], la integral definida se puede descomponer como una suma de integrales extendidas en los intervalos que corresponden tales como [a, c] y [c, b].

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

Proposición 4:

La integral definida de una suma de funciones es igual a la sumad e la integral de funciones por separado, esta es la propiedad de Linealidad.

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

Proposición 5:

La integral del producto entre una constate por una función es igual al producto entre la constante por la integral de la función.

$$\int_a^b k * f(x)dx = k * \int_a^b f(x)dx$$

2.6.3.2 Integral definida

Sea $f(t)$ una función continua en el intervalo [a, b]. A partir de esta función se determina la función integral correspondiente:

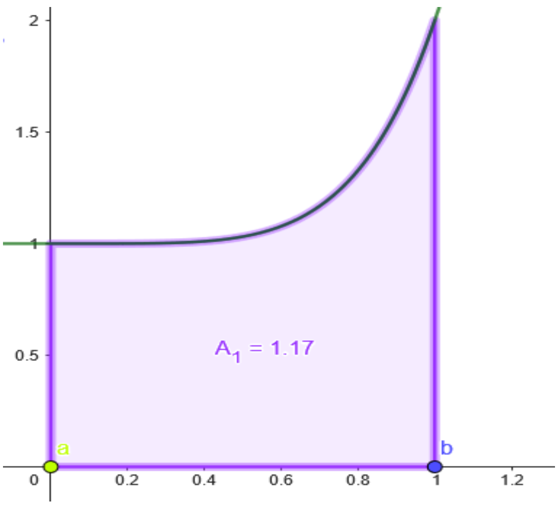
$$F(x) = \int_a^b f(x)dx$$

Esto depende del límite superior de integración.

Geométricamente una función integral $F(x)$, esto representa el área de un perímetro por la curva entre $y = f(t)$, el eje de las abscisas y las rectas entre $t = a$ y $t = x$.

Figura 2

Integral definida



Nota: Representación geométrica de la integral definida esta representación varia su interpretación según las magnitudes de sus ejes.

A la función integral $F(x)$, también se le denomina función de áreas de f en el intervalo $[a, b]$. Siempre y cuando f sea una función no negativa.

2.6.3.3 Regla de Barrow

Entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

$F(x)|_a^b$ es una forma de escribir $F(b) - F(a)$.

Nota: No sé a pedido que nuestra función $f(x)$ sea positiva ya que el resultado es valido para cualquier función continua.

2.6.3.4 Teorema fundamental del calculo

Si $F(x)$ es una función continua en el intervalo $[a, b]$ y $F'(x) = f(x)$ para todo x en (a, b) (Rossini y Alonso, 2015).

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \; es \; deribable$$

Esta parte del teorema proporciona un método para evaluar la integral definida utilizando antiderivadas.

2.6.3.5 Función Integral

Si es f una función continua en un intervalo [a, b].

Entonces la función $F(x)$ definida por:
$F(x) = \int_a^x f(t)dx$ para $a \leq x \geq b$.

Es una antiderivada de la función $f(x)$ en el intervalo [a, b]; es decir, $F'(x) = f(x)$ para cualquier $x \in [a, b]$.

La función $F(x)$se define como la integral definida de la función $f(t)$ en el intervalo de $[a, x]$. De modo que la variable x representa el borde derecho en el que se calcula la integral definida. Para calcula el valor de x fijo,

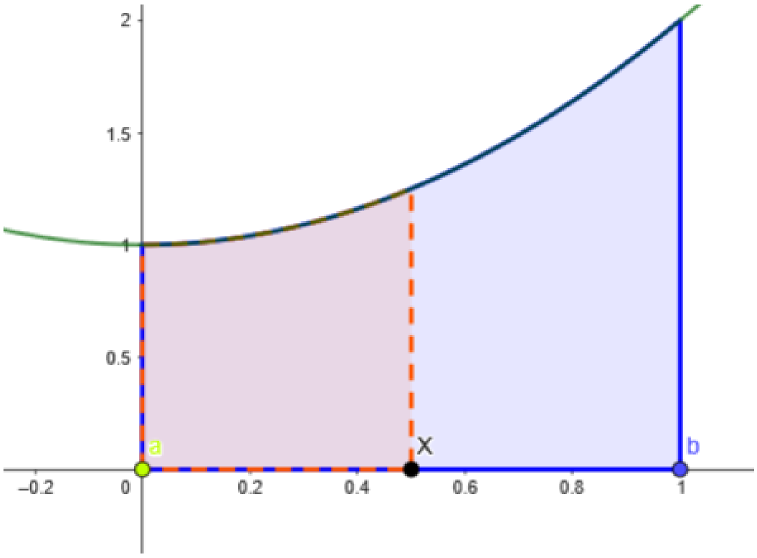
$$\int_a^x f(t)dt$$

Es considerado un número real, de modo que cuando varia x en el intervalo [a, b] se obtiene los diferentes valores correspondientes a $F(x)$.

Si $f(t)$ es positivo en el intervalo de [a, b] entonces $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ representa el área debajo de la función f en el intervalo [a, x] como se observa en la siguiente figura (Engler et al., 2020).

Figura 3

Función Integral



Nota: Se representa la función integral área de una región bajo la ecuación de una curva.

2.6.3.6 Área del recinto donde interviene una función

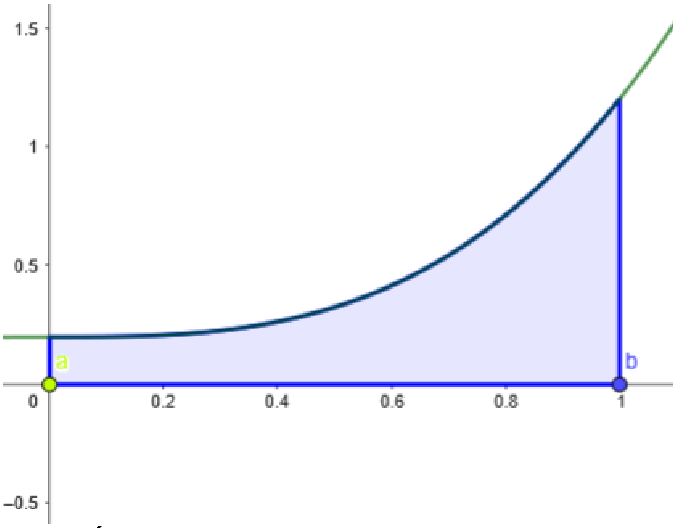
Podemos distinguir tres casos fundamentales, dependiendo de los valores que tome $f(x)$. Ejemplos:

- La función $f(x)$ es positiva en el intervalo [a, b].

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

Figura 4

Área bajo una curva positiva

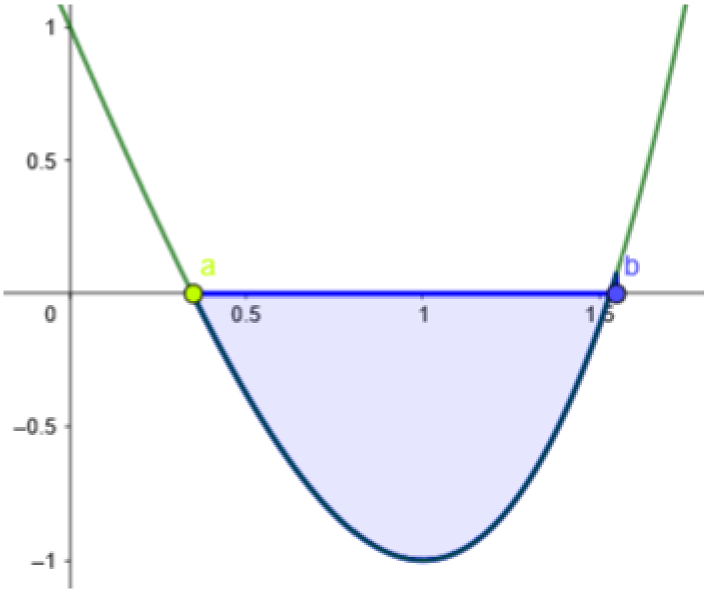


Nota: Área bajo la curva positiva resolución de integrales definidas.

- La función $f(x)$ es negativa en el intervalo [a, b].

$$A = -\int_a^b f(x)dx \ = \left|\int_a^b f(x)dx\right|$$

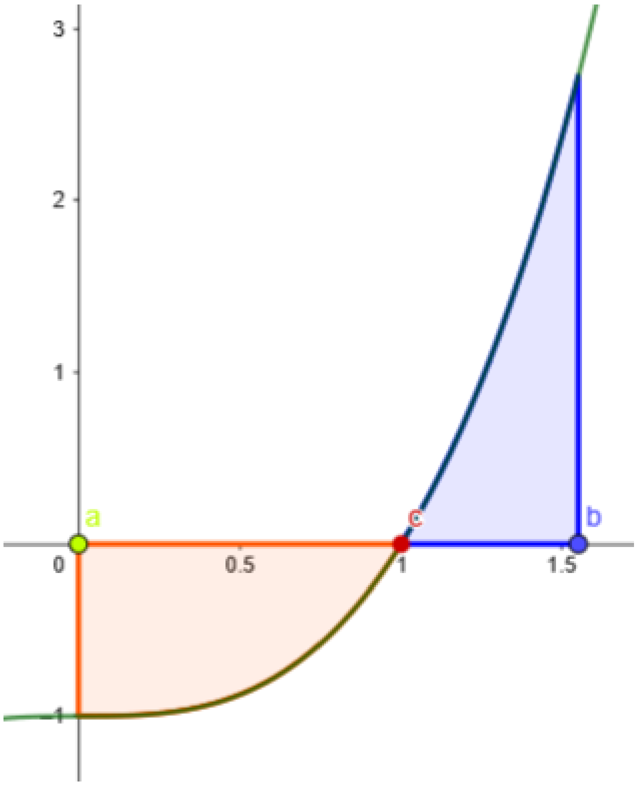
Figura 5
Área bajo una curva negativa



Nota: Representación de la gráfica de una área bajo una curva negativa.

- La función $f(x)$ toma valores tanto negativos como positivos en el intervalo [a, b].

Figura 6
Área bajo la curva con valores positivos y negativos.



Fuente: Representación de un área de una curva positiva, negativa o adición de integrales.

$$A = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

2.6.3.7 Área del recinto donde intervienen dos funciones

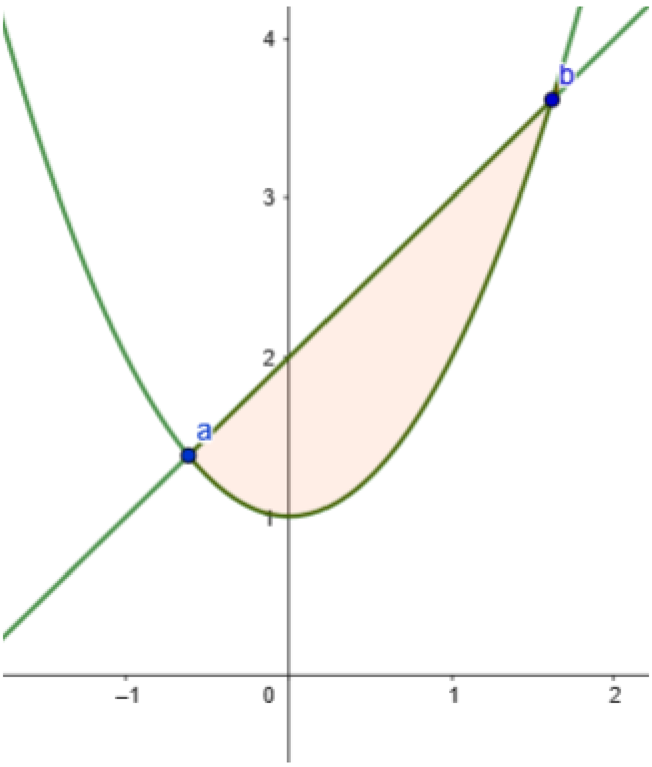
Denotamos por A el recinto de limitado por las rectas $x = a, x = b$ y las curvas $y = f(x), y = g(x)$.

Se pueden distinguir cuatro casos dependiendo de los valores que se den a las funciones $f(x)$ y $g(x)$.

Si las funciones son positivas en el intervalo de [a, b] y sus graficas en el intervalo considerado, dado que quizás $x = a$ o $x = b$.

$$A = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$$

Figura 7
Área entre dos funciones.



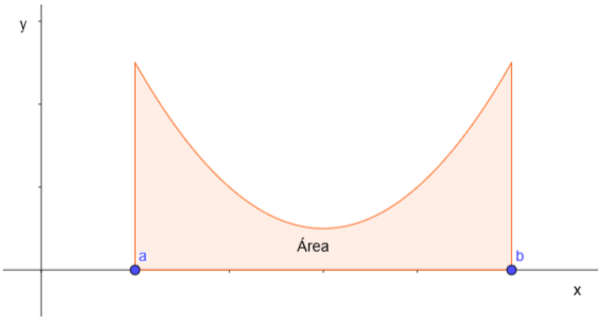
Nota: Cálculo de área entre dos funciones mediante integrales definidas.

2.6.4 Área regiones planas

Teorema:

GRANVlllE (2009) *nos menciona que "la diferencia de los valores de* $\int ydx$ *para* $x = a$ *y* $x = b$ *da el área limitada por la curva cuya ordenada es* y*, el eje de las* x *y las ordenadas corresponden a* $x = a$ *y* $x = b$" (p. 288).

Figura 8
Áreas plana



Nota: Calculo de áreas planas de regiones bajo una curva aplicando calculo integral integrales definidas.

Hay que recordar que según Bragulat (2000), "si f: $[a, b] \to \mathrm{R}$ es una función acotada y positiva en su dominio; ya se ha comentado que la integral de f en el intervalo $[a, b]$ puede interpretarse como el area del subconjunto $W \subset R^2$ que está definido" (p. 366).

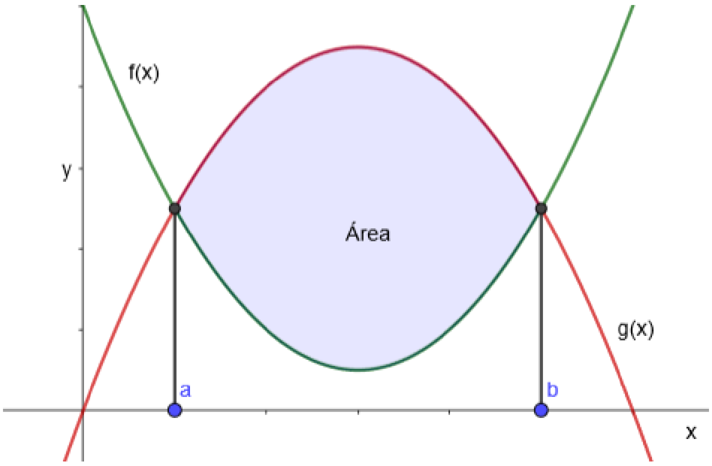
$$\lambda\big(G(f, a, b)\big) = \int_a^b f(x)\, dx$$

2.6.4.1 Área de regiones entre curvas

Según Engler et al. (2020) en su libro mencionan que sean f, g: $[a, b] \to R$ funciones continuas tales que $f(x) \geq g(x) \quad \forall x \in [a, b]$, entonces el área de la región M del plano entre las curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ en el intervalo $[a, b]$ esta dada de la siguiente manera (p. 104)

$$A(M) = \int_a^b \big(f(x) + g(x)\big) dx$$

Figura 9
Área entre curvas



Nota: Se representa una región entre curvas planas aproximación de área de regiones planas.

2.6.5 Cálculo de áreas 2

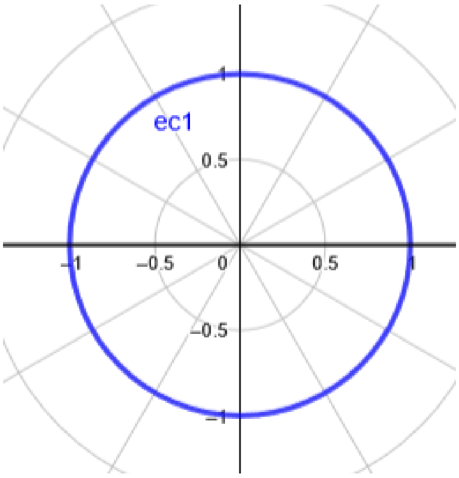
Teorema:

Suponga que f es una funcion continua y no negativa en el intervalo $\alpha \leq \theta \leq \beta$ con $0 \leq \beta - \alpha \leq 2\pi$. El area de la region delimitada por la grafica de $r = f(\theta)$ entre las lineas radiales $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$, entoces:

$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} (f(\theta))^2 \, d\theta = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} (r)^2 \, d\theta$$

Figura 10

Ecuación de una circunferencia



Nota: Grafica de la ecuación de una circunferencia.

2.6.6 Integración aproximada

Según Purcell et al (2007) hay muchas integrales definidas que no se pueden evaluar mediante los métodos que hemos aprendido; es decir,

$$\int sen(x^2)dx, \int \sqrt{1-4x^2}dx, \int \frac{senx}{x}dx$$

No se pueden expresar algebraicamente utilizando funciones elementales, es decir, aquellas que se estudian en un curso introductorio de cálculo. Aunque es posible encontrar algunas integrales indefinidas elementales, suele ser más práctico recurrir a métodos de aproximación como los descritos en esta sección. Estos métodos ofrecen algoritmos eficientes que pueden ser programados directamente en calculadoras o computadoras (p. 260).

2.6.6.1 Método Trapecios

Según Del Rosario (2017) se considera la regla de trapecio como una formula cerrada de integración de Newton-Cotes. Corresponde al caso donde la ecuación es de primer grado.

$$I = \int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b f_1(x)dx$$

Sabemos que la ecuación de la recta se puede representar de la siguiente manera.

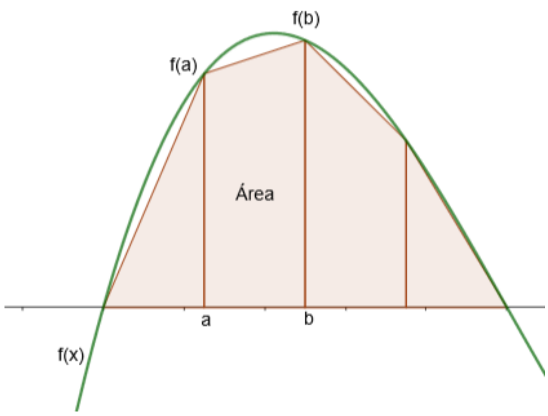
$$f_1 = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Entonces el área bajo esta línea recta es una aproximación de la integral de $f(x)$ entre los limites a, b.

El resultado de la integral es la regla del trapecio;

$$I = (b - a)\frac{f(a) + f(b)}{2}$$

Figura 11
Método Trapecios



Nota: Representación del método de trapecios para aproximación del area bajo una curva de una ecuación.

2.6.6.1.1 Método Trapecios múltiples

En su libro Chapra y Raymond (2015) nos menciona que una estrategia para perfeccionar la precisión del método del trapecio implica dividir el intervalo de integración, que va desde a a b en múltiples segmentos. Luego, se aplica el método del trapecio a cada uno de estos segmentos por separado. Después de calcular el área de cada segmento, estas áreas se suman para obtener el valor integral en todo el intervalo. Estas fórmulas resultantes se denominan fórmulas de integración compuestas o de aplicación múltiple (p. 472).

$$I = (b-a)\frac{f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)}{2n}$$

Formula error trapezoidal.

$$|E_t| = \frac{K(b-a)^3}{12n^2}$$

2.6.6.2 Método Simpson un tercio

Strang y Herman (2022) nos menciona que $f(x)$ es continua $[a,b]$, supongamos que n es un número entero par positivo y $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Supongamos que $[a,b]$ se divide en n subintervalos, cada uno de ellos de longitud Δx, con puntos finales en $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Establece que

$$S_n = \frac{\Delta x}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \cdots + 4f(x_{n-2}) + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

Entonces;

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_a^b f(x)dx$$

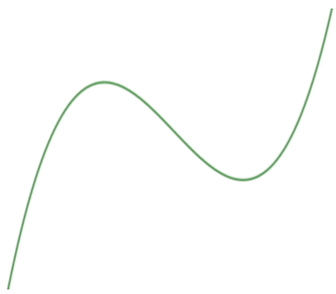
Estas fórmulas permites a los estudiantes determinar los valores aproximados de la integral.

2.6.7 Aplicación de la integral

2.6.7.1 Aplicación de la integral

Según Stewart (2012), ¿Qué se entiende por longitud de una curva? Podríamos pensar en ajustar un trozo de cuerda a la curva de la figura 1, y después medir la cuerda con una regla. Pero eso podría ser difícil de hacer con mucha exactitud si se tiene una curva complicada.

Figura 12
Longitud de arco



Nota: Imagen que representa la longitud del arco de una función para ser calculada con la fórmula de longitud de arco.

Formula longitud de arco:

Como nos menciona Carrillo (2001) en su documento, si f' es continua sobre $[a,b]$, entonces la longitud de la curva $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, es:

$$\boldsymbol{L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx}$$

Si una curva tiene la siguiente ecuación $x = g(y)$, $c \leq y \leq d$, entonces:

$$L = \int_a^d \sqrt{\boldsymbol{1 + [g'(y)]^2 dy}}$$

.

CAPÍTULO III

METODOLOGIA

3.1 Enfoque de la investigación

La presente investigación mantiene un enfoque cuantitativo debido a que puede medir fenómenos, utiliza preceptos estadísticos que permiten el manejó datos numéricos para la obtención de conclusiones.

3.2 Diseño de la investigación

La presente investigación tiene un diseño no experimental debido a que se diseñó material didáctico para el aprendizaje de integrales definidas en los estudiantes de quinto semestre de la carrera de pedagogía de las ciencias experimentales matemáticas y física, mas no se aplicará.

3.3 Tipo de investigación

Propositiva: Se propuso material didáctico que permita el aprendizaje de la matemática en los estudiantes.

Bibliográfica: La presente investigación fue de carácter bibliográfico, porque para ser fundamentada se necesitará de la búsqueda de información referente al tema de estudio.

3.4 Nivel de investigación

El nivel la investigación fue de carácter descriptivo propositivo, debido a que se buscó describir características de la metodología del aula invertida, proponer material didáctico para los estudiantes de quinto semestre de la Carrera De Pedagogía de las Ciencias Experimentales Matemática Y Física periodo 2023-1s.

3.5 Técnicas de recolección de datos

La técnica que se utilizo para la recolección de datos fue la observación, para analizar los contenidos acerca de la unidad temática de cálculo integral: integrales definidas, que nos permitió desarrollar guías de aprendizaje y material audiovisual para su uso en la metodología aula invertida.

3.6 Instrumento

El instrumento que se utilizó para la investigación es la ficha de observación que permitió ver la relación de temas con la unidad temática integrales definidas.

No se aplicó ningún proceso de validación de instrumento dado que se utilizó para seleccionar los temas sobre los cuales se elaboraron el material de teoría y material audiovisual.

Revisión del instrumento en el anexo 1.

3.7 Población y Muestra

3.7.1 Población

Se ha considerado como población el número de temas relacionados con la integral definida que se encuentran en el silabo y son 6.

3.7.2 Muestra

No se aplica una muestra para la siguiente investigación.

CAPÍTULO IV

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

4.1 Resultados

4.1.1 Criterios de selección para los temas de la integral definida

En esta investigación se procedió a seleccionar los temas con el siguiente criterio todos los temas que correspondan a la integral definida y guarden relación con la misma, al revisar el silabo se seleccionaron los siguientes temas:

- Sumatorias. Dentro de las sumatorias se encontró la aproximación de áreas mediante el uso de rectángulos superiores, inferiores y puntos medios lo que permite calcular áreas con un margen de error que depende del número de rectángulos que se utilizan para su aproximación.

- Integral definida. La integración es el proceso de encontrar la acumulación total de cambios a lo largo de un intervalo, como calcular áreas bajo curvas. Es el inverso de la diferenciación y se usa en muchas áreas, desde la física hasta la economía.

- Cálculo de áreas 1. Se revisaron temas como áreas bajo la curva, regiones entre curvas y la representación geométrica de la integral dependiendo esta de las magnitudes que se utilicen en los ejes x, y.

- Cálculo de áreas 2. Se reviso los temas áreas de superficies limitadas por curvas planas, el tema de solidos en revolución, área de una superficie de revolución longitud del arco de una función como los temas principales dentro de la aplicación de integrales definidas.

- Integral aproximada. La integral aproximada es una forma de estimar el valor de una integral cuando no se puede calcular exactamente, este método es útil cuando la función no tiene una primitiva fácil de encontrar o cuando se trabaja con datos discretos en lugar de una función continua.

- Aplicaciones de la integral. La integral tiene aplicaciones en física, ingeniería, economía, biología, medicina, estadística y geometría. Se utiliza para calcular áreas, volúmenes, trabajos, energías, probabilidades, y muchos otros conceptos cuantitativos en diversas disciplinas. Es una herramienta esencial para modelar y resolver una amplia gama de problemas en diferentes campos del conocimiento.

La selección de temas para problemas de integral definida debe considerar la relevancia práctica, la diversidad de funciones, la progresión de la dificultad, la inclusión de conceptos fundamentales, desafíos adicionales, y la exploración de contextos históricos y culturales. Estos criterios garantizan una experiencia de aprendizaje efectiva y estimulante para los estudiantes, permitiéndoles comprender la aplicabilidad y la versatilidad de las integrales definidas en diversos campos.

4.2.1 Fortalezas del aula invertida

Según varios autores mencionan que las fortalezas del uso del aula invertida en el aprendizaje son los siguientes.

Personalización del aprendizaje: Los estudiantes tienen la oportunidad de revisar el material tantas veces como sea necesario para comprenderlo completamente, lo que permite adaptarse a diferentes estilos de aprendizaje y ritmos individuales.

Mayor interacción y participación: Al dedicar el tiempo en clase a actividades prácticas y colaborativas, los estudiantes pueden interactuar más con el profesor y sus compañeros, lo que fomenta un ambiente de aprendizaje más dinámico y participativo.

Desarrollo de habilidades críticas: El aula invertida promueve la resolución de problemas, el pensamiento crítico y la aplicación de conceptos, ya que los estudiantes trabajan activamente en la aplicación del conocimiento adquirido durante el tiempo fuera del aula.

Flexibilidad y autonomía: Los estudiantes tienen más control sobre su propio proceso de aprendizaje, ya que pueden acceder al material de estudio en cualquier momento y lugar que les resulte conveniente, lo que les permite organizar su tiempo de estudio de acuerdo con sus necesidades individuales.

Utilización eficiente del tiempo en clase: Al trasladar la instrucción directa fuera del aula, se libera tiempo valioso en clase para actividades más interactivas y prácticas, lo que permite una enseñanza más personalizada y centrada en el estudiante.

Mejora del compromiso y la motivación: Al participar en actividades prácticas y colaborativas durante el tiempo en clase, los estudiantes suelen estar más comprometidos y motivados, ya que ven la relevancia directa del contenido y experimentan una mayor sensación de logro al aplicar lo aprendido.

4.2.2 Elaboración de guías de aprendizaje

Con los temas ya seleccionados se elabora 1 documento por cada tema de las integrales definidas los criterios para elaborar guías de aprendizaje de cálculo integral para integrales definidas incluyen establecer objetivos claros, organizar la guía de manera estructurada, proporcionar explicaciones detalladas y ejemplos, ofrecer una variedad de ejercicios, incluir preguntas reflexivas, sugerir estrategias para resolver problemas, proporcionar recursos adicionales y ofrecer evaluación y retroalimentación a los estudiantes. Estos elementos garantizan una guía efectiva que facilite la comprensión y la aplicación de los conceptos relacionados con las integrales definidas en el cálculo integral.

4.2.3 Elaboración de videos con los temas revisados

4.2.3.1 Criterios aplicados en la elaboración de los videos

En la elaboración de videos para el modelo de aula invertida, es esencial considerar la claridad, la focalización en conceptos clave, la estructura lógica, la interactividad, la adaptación al estudiante, la calidad técnica y la accesibilidad. Estos criterios aseguran que los videos sean efectivos, facilitando el aprendizaje activo y proporcionando una experiencia educativa enriquecedora para todos los estudiantes.

4.2.3.2 Aspectos aplicados en la elaboración de los videos para su uso en el aula invertida.

- Cobertura de conceptos básicos y técnicas de integración
- Enfoque de comprensión profunda y aplicación en contextos reales
- Retroalimentación inmediata y explicaciones adicionales
- Inclusión de ejemplo prácticos y problemas resueltos
- Accesibilidad mediante subtítulos para visualización de los videos.

4.2.3.3 Resultados del proceso.

Los resultados que se obtuvieron fue la investigación de temas que se encuentran en el silabo de la asignatura específicamente en la unidad temática de las integrales definidas, se cuenta con 6 documentos con teoría y ejercicios que se pueden revisar para conocer los temas.

También contamos con 6 planes de clases de temas del silabo seleccionados con los criterios adecuados que están organizados por tiempos estimados que se aplican para la revisión de los temas consultados junto con los ejercicios de aplicación.

Se desarrolló también 6 guiones de video con que permiten generar recursos visuales en los que se resaltan temas, conceptos, ejercicios y fórmulas que ayudan a tener más fuentes de información acerca de integrales definidas que se pueden utilizar en la metodología de aula invertida para el aprendizaje de los estudiantes de quinto semestre de la Universidad Nacional de Chimborazo.

5.1 Discusión

En el trabajo titulado “Los beneficios y desafíos de la implementación de la clase inversa en la educación secundaria” Chicaiza et al. (2023) nos mencionan que los hallazgos indican que la clase invertida estimula la investigación, colaboración y aplicación práctica de los estudiantes, mediante actividades destinadas a explorar y recopilar información relevante, lo que fomenta la comprensión y la construcción colaborativa del conocimiento. Se llega a la conclusión de que la clase invertida en la educación secundaria fomenta la participación activa de los estudiantes en la búsqueda de información y actividades colaborativas, aunque requiere una guía adecuada para promover el pensamiento crítico y el desarrollo de habilidades de investigación; las actividades prácticas deben estar alineadas con los objetivos de aprendizaje y se debe crear un entorno de confianza, ofreciendo explicaciones adicionales y mostrando interés en las inquietudes de los estudiantes para lograr una comprensión contextualizada. Por otra parte, en el trabajo previo " El aula invertida y la construcción de conocimiento en matemáticas" Fúneme Mateus (2019) nos mención que, durante el primer semestre universitario, se implementó el método de "Aula Invertida" en dos clases de cálculo diferencial. En estas clases, se centraron en enseñar el concepto matemático de derivada y su aplicación en problemas relacionados con tasas de cambio, velocidades, así como máximos y mínimos. El análisis se basó en revisar las grabaciones de las clases y en la interacción en redes sociales entre los estudiantes. Se describieron tanto los aspectos positivos como los negativos observados durante la aplicación de esta metodología, y se investigó cómo se relacionaban con el rendimiento académico de los estudiantes. Este análisis destacó la necesidad de mejorar los fundamentos del método de "Aula Invertida" en cuanto al proceso de aprendizaje del concepto matemático de derivada por parte de los estudiantes.

CAPÍTULO V
CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

5.2 Conclusiones

- Se identificaron los contenidos del silabo con el criterio de inclusión contenidos que se relacionan al contenido de la integral definida la que el mismo se subdivide en 6 temas cada uno con 3 subtemas que guardan relación con la integral definida.
- Se identificaron varias fortalezas acerca de la aplicación de la metodología del aula invertida como son la personalización del aprendizaje por parte de los estudiantes, promoción del pensamiento crítico, la flexibilidad y accesibilidad a la información, desarrollo de habilidades de autogestión, facilita la retroalimentación inmediata, motivación incrementada y diversificación de recursos, la metodología del aula invertida en el aprendizaje de las matemáticas permite un enfoque más interactivo, personalizado y centrado en el estudiante, lo que puede mejorar significativamente la comprensión y el rendimiento académico en esta disciplina..
- Se desarrollo de guías de aprendizaje de los contenidos de la integral definida que se encuentran en el silabo para los estudiantes de quinto semestre de la Universidad Nacional de Chimborazo, y se encontró que se realizaron 6 documentos que contienen definiciones, ejercicios y aplicaciones que el estudiante debe analizar, también se cuenta con contenido audiovisual de cada tema con definición y actividades para aplicar en las clases de la unidad temática integrales definidas los mismos redireccionados a su uso en la metodología del aula invertida.
- La implementación de la metodología del aula invertida para el aprendizaje de integrales definidas en estudiantes de quinto semestre de la Carrera de Pedagogía de las ciencias experimentales, Matemáticas y Física en la Universidad Nacional de Chimborazo, puede resultar en una mejora significativa en la comprensión y aplicación de conceptos matemáticos complejos. Al desplazar la adquisición de conocimientos básicos fuera del aula, se fomenta un ambiente de aprendizaje activo y colaborativo durante las sesiones presenciales, donde los estudiantes pueden abordar problemas más avanzados, participar en discusiones significativas y recibir retroalimentación personalizada de sus docentes. Esta metodología promueve la autonomía, la responsabilidad y el pensamiento crítico, preparando a los futuros pedagogos para enseñar de manera más efectiva y adaptativa en entornos educativos diversos.

5.3 Recomendaciones

- Si tienen que revisar temas para elaborar guías de aprendizaje se sugiere ver que los contenidos que se van a ocupar tengan relación con el tema principal de investigación.

- Se sugiere organizar los temas de forma lógica, desde conceptos básicos hasta avanzados, proporciona ejemplos variados y claras explicaciones, incluye ejercicios prácticos y establece canales de comunicación para consultas y retroalimentación. Además, ofrece herramientas de evaluación y revisa regularmente el material para mantenerlo actualizado.
- Se recomienda utilizar equipos de grabación de calidad y editar los videos para mejorar su apariencia y eliminar errores técnicos. Además, es importante utilizar un lenguaje accesible y claro, e integrar elementos interactivos para fomentar la participación de los espectadores.
- Se recomienda conocer cómo aplicar la metodología de aula invertida para que aplique de manera adecuada la guía de aprendizaje y el material audio visual que permita el desarrollo de los estudiantes en el ámbito académico, la retroalimentación y la revisión continua son clave para garantizar la efectividad de los videos y realizar mejoras según sea necesario.

CAPÍTULO VI

PROPUESTA

6.1 Título de la propuesta

Guías de aprendizaje y material audiovisual de la unidad temática integrales definidas para ser aplicado en la metodología de aula invertida para los estudiantes de quinto semestre de la Universidad Nacional de Chimborazo.

6.2 Introducción

La estrategia de aula invertida, también conocida como flipped classroom, ha revolucionado la forma en que se enseña y se aprende matemáticas. En el contexto de las integrales definidas, esta metodología ofrece una oportunidad única para involucrar a los estudiantes de manera más activa y profunda en el proceso de aprendizaje.

El aula invertida se basa en la idea de que los estudiantes adquieren el conocimiento básico fuera del aula, a través de recursos como videos explicativos, lecturas y ejercicios interactivos, para luego utilizar el tiempo en clase para actividades más prácticas y colaborativas, como resolución de problemas, discusiones grupales y aplicaciones prácticas del contenido.

Al diseñar material didáctico para un enfoque de aula invertida sobre integrales definidas, es fundamental crear recursos que guíen a los estudiantes en el proceso de comprensión de conceptos clave, técnicas de resolución de problemas y aplicaciones prácticas. Esto puede incluir videos explicativos, lecturas y materiales de apoyo, ejercicios interactivos y actividades en clase.

Al adoptar un enfoque de aula invertida para enseñar integrales definidas, los profesores pueden fomentar un aprendizaje más activo y colaborativo, permitiendo a los estudiantes desarrollar habilidades de pensamiento crítico, resolución de problemas y aplicación práctica de los conceptos matemáticos.

6.3 Objetivos de la propuesta

6.3.1 Objetivo General:

Desarrollar material didáctico que sirva como apoyo hacia los estudiantes con el propósito de mejorar la comprensión de los conceptos básicos de la integral definida.

6.3.2 Objetivos específicos:

- Proporcionar una gama de recursos que abarquen conceptos básicos y fundamentales de la integral definida.
- Vincular recursos multimedia que permitan una mejor fundamentación para la elaboración de recursos didácticos para los estudiantes.

- Diseñar actividades para que los estudiantes analicen, desarrollen de forma activa.

6.4 Fundamentación teórica

6.4.1 Aula invertida

El aula invertida es una metodología educativa que cambia el paradigma tradicional de enseñanza al transferir el aprendizaje directo fuera del aula y utilizar el tiempo en clase para actividades más interactivas y prácticas. Los estudiantes adquieren el contenido básico a través de recursos como videos, lecturas y ejercicios en línea antes de la clase, lo que les permite llegar preparados para participar en discusiones, resolver problemas y aplicar activamente el conocimiento durante el tiempo en clase. Este enfoque promueve un aprendizaje más autónomo, colaborativo y centrado en el estudiante.

6.4.2 Cálculo Integral

La calculo integral es una rama fundamental del cálculo que se centra en el estudio de las funciones y sus áreas bajo una curva, así como en la acumulación de cantidades y la resolución de problemas de optimización. Hay dos conceptos principales en cálculo integral: la integral indefinida y la integral definida.

6.4.2.1 Integral Indefinida

La integral indefinida, representada por $\int f(x)\,dx$, es una antiderivada de la función $f(x)$. Es decir, si derivas la función resultante, obtienes nuevamente la función original más una constante. Se utiliza para encontrar funciones primitivas y calcular áreas bajo curvas de manera general.

6.4.2.2 Integral Definida

La integral definida, representada por $\int_a^b f(x)dx$, calcula el área bajo la curva de la función $f(x)$ en un intervalo dado $[a, b]$. Se utiliza para determinar áreas, volúmenes, y promedios ponderados, entre otros conceptos, y se calcula restando el valor de la función en el límite superior del intervalo menos el valor en el límite inferior.

6.4.3 Aplicaciones integrales definida

La integral definida tiene numerosas aplicaciones en diferentes campos, aquí te menciono algunas de las más comunes:

Cálculo de áreas: La integral definida se utiliza para calcular el área bajo una curva en un intervalo específico. Esto es útil en geometría para determinar áreas de regiones planas con formas irregulares.

Cálculo de volúmenes: Se puede usar la integral definida para calcular el volumen de sólidos obtenidos al rotar una región acotada alrededor de un eje. Este concepto es esencial en geometría sólida y en la física para determinar volúmenes de sólidos de revolución.

Centro de masa y momento de inercia: La integral definida se aplica en física y ingeniería para calcular el centro de masa y el momento de inercia de objetos con formas complicadas. Estos conceptos son fundamentales en el diseño de estructuras y en la mecánica de sólidos.

Probabilidad y estadística: En probabilidad y estadística, la integral definida se utiliza para calcular probabilidades a partir de funciones de densidad de probabilidad. También se emplea en la construcción de distribuciones acumulativas y en la determinación de valores esperados.

Trabajo y energía: En física, la integral definida se utiliza para calcular el trabajo realizado por una fuerza a lo largo de una trayectoria y para determinar la energía almacenada en sistemas físicos. Esto es esencial en el estudio de la mecánica clásica y en la ingeniería.

Análisis de circuitos eléctricos: La integral definida se utiliza en ingeniería eléctrica para calcular la carga acumulada y la energía almacenada en un circuito eléctrico en función del tiempo.

Estas son solo algunas de las aplicaciones más comunes de la integral definida, pero su versatilidad la hace útil en una amplia gama de campos científicos, tecnológicos y de ingeniería.

6.4.4 Material didáctico

El material didáctico es cualquier recurso, herramienta o medio utilizado para facilitar el proceso de enseñanza y aprendizaje. Este puede incluir una amplia variedad de elementos, como libros de texto, presentaciones en PowerPoint, videos educativos, juegos interactivos, ejercicios prácticos, actividades en línea, entre otros.

El objetivo principal del material didáctico es proporcionar a los estudiantes una forma efectiva de acceder a la información, comprender conceptos, practicar habilidades y consolidar el conocimiento adquirido en el aula. Además, el material didáctico puede adaptarse para satisfacer las necesidades específicas de los estudiantes y los objetivos de aprendizaje de un curso o una lección en particular.

6.4.5 Ciclo de Kolb

El ciclo de Kolb es un modelo de aprendizaje propuesto por David Kolb en la década de 1980. Este modelo describe cuatro etapas principales que las personas atraviesan al aprender nuevas habilidades o conceptos. Las etapas son:

Experiencia concreta:

Implica la experiencia directa en la que el individuo se involucra activamente en una situación o actividad.

Observación reflexiva:

Después de la experiencia, el individuo reflexiona sobre lo que ha ocurrido, analizando y observando los resultados y las implicaciones de sus acciones.

Conceptualización abstracta:

En esta etapa, el individuo intenta formular conceptos o teorías basados en la experiencia y la reflexión, tratando de entender el porqué de lo que sucedió.

Experimentación activa:

Finalmente, el individuo prueba los conceptos o teorías en nuevas situaciones o contextos, aplicando lo que ha aprendido a través de la experiencia y la reflexión.

El ciclo de Kolb sugiere que el aprendizaje efectivo implica pasar por todas estas etapas de manera continua, adaptándose y mejorando constantemente. Además, reconoce que las personas pueden tener preferencias individuales por ciertas etapas del ciclo, lo que influye en su estilo de aprendizaje.

6.5 Contenido de la propuesta

6.5.1 Planes de clases enfoque aula invertida

Plan de clases: Sumatorias.

PLAN DE CLASES

AULA INVERTIDA

ASIGNATURA: Cálculo Integral

CURSO: Quinto Semestre

UNIDAD TEMATICA: Integral definida

Fecha de inicio:	Fecha de término:

Se establece de acuerdo con la necesidad del docente.

Objetivo de la unidad:

Al finalizar esta unidad temática, los estudiantes serán capaces de comprender, aplicar y manipular conceptos relacionados con sumatorias superiores e inferiores en el contexto de cálculo integral para la aproximación de áreas de regiones planas.

TEMA:

Sumas inferiores, superiores y puntos medios

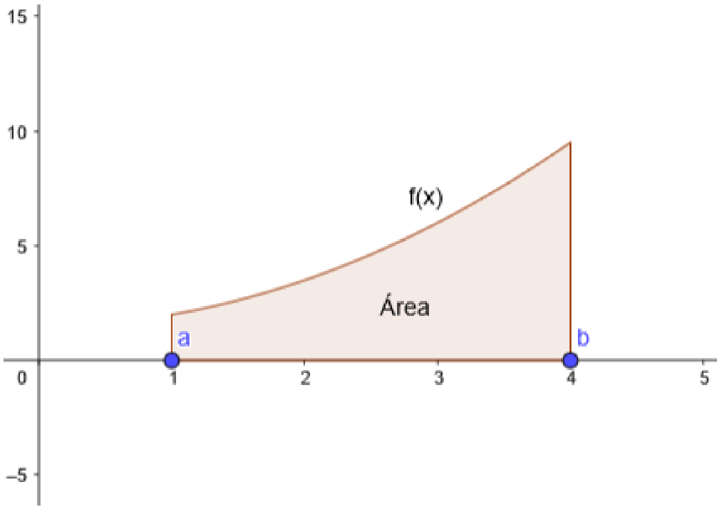
Clase	
Objetivo	Los estudiantes serán capaces de identificar el método más conveniente para calcular el área de una región plana mediante sumatorias.
Desarrollo	Inicio: Motivación: Duración: 5-6 min Ayuda a los estudiantes a establecer metas realistas y alcanzables para la clase. Aprender a desarrollar ejercicios por los métodos de sumas superiores e inferiores para calcular área entre regiones planas. Desarrollo: Experiencia: Duración: 10-15 min Demostraciones en vivo Realiza demostraciones en vivo o ejemplos prácticos relacionados con el tema de la clase. Esto permite a los estudiantes ver cómo se aplica la teoría en situaciones reales. Preparación de materiales: - Necesitarás papel, lápices y reglas para cada estudiante. - Un área grande, como un pizarrón o papel grande, para realizar las demostraciones. Presentación del problema: Muestra una región plana simple, como un rectángulo o un triángulo, cuya área se puede calcular fácilmente a mano. Explica que queremos encontrar una forma de calcular áreas para regiones más complejas. División de la región en subintervalos: Comienza dividiendo la región en subintervalos horizontales o verticales y etiqueta cada subintervalo con un número (1, 2, 3, ... n).

	Aproximación usando rectángulos: Muestra cómo podemos aproximar la región con rectángulos que se ajustan a los subintervalos. Calcula el área de cada rectángulo y suma estas áreas. Reflexión: Duración: 10-15 min Discusiones en grupo. Fomenta discusiones en grupos pequeños sobre el contenido de la clase, animando a los estudiantes a reflexionar sobre lo que han aprendido y a compartir sus perspectivas. Realizar las siguientes preguntas: ¿Cómo se relaciona una sumatoria con el proceso de aproximación de áreas bajo una curva? La integral definida se utiliza para calcular con precisión el área bajo una curva, y es la generalización matemática de la idea de usar sumas para aproximaciones. La sumatoria es solo una aproximación discreta de la integral definida, y la integral es la solución continua y exacta. ¿Cuál es la relación entre la integral definida y una sumatoria? Es una generalización continua de la aproximación discreta que proporciona una sumatoria cuando se toma el límite con intervalos infinitesimalmente pequeños y un número infinito de términos. ¿Cómo varía la aproximación de un área bajo una curva a medida que aumentamos el número de términos en la sumatoria? A medida que aumentamos el número de términos en la sumatoria, la aproximación se vuelve más precisa y se acerca al valor real del área bajo la curva ¿Puedes proporcionar ejemplos de situaciones del mundo real en las que las sumatorias sean aplicables? Las sumatorias son esenciales para resolver ecuaciones diferenciales en la física y la matemática. Las sumatorias son comunes en programación y algoritmos.

	Conceptualización: Duración: 30-35 min - Resolver las inquietudes de los estudiantes acerca del material didáctico revisado en sus casas. Introducción a las sumatorias **Definición:** Una sumatoria, está representada por el símbolo griego sigma ($\sum$), es una forma de expresar la adición de una secuencia de términos. Esta notación es fundamental en matemáticas y se utiliza para sumar una serie de números o expresiones. La expresión general de la sumatoria es: $$\sum_{i=n_1}^{n} X_i = n$$ Donde: i es la variable de la sumatoria que toma valores desde n_1 hasta n. $n_1$es el primer valor de i. n es el último valor de i. X_i es la expresión que se suma para cada valor de i. **Sumatoria de una constante:** $$\sum_{i=1}^{n} c = c + c + c + \cdots + c$$ Sumando c en un total de n veces. **Sumatoria de los primeros n números naturales:** $$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$$ **Sumatoria de cuadrados:** $$\sum_{i=1}^{n} i^2 = i^2 + i^2 + i^2 + \cdots + n^2$$ **Sumatoria de una secuencia dada:** $$\sum_{i=1}^{5} (2i - 1) = (2(1) - 1) + (2(2) - 1) + (2(3) - 1) + \cdots + (2(5) - 1)$$

Aproximación de áreas

Asumimos que $f(x)$ es una función continua y no negativa definida en el intervalo cerrado $[a, b]$ Queremos aproximar el área A delimitada por $f(x)$ arriba, el eje abajo, la línea $x = a$ a la izquierda, y la línea $x = b$ a la derecha.



Para aproximar el área bajo esta curva utilizando un enfoque geométrico este método se basa en subdividir la región en rectángulos al agregar estas áreas obtenemos una aproximación del área total debajo de la curva

Sumas Inferiores

Aproximación sumas inferiores

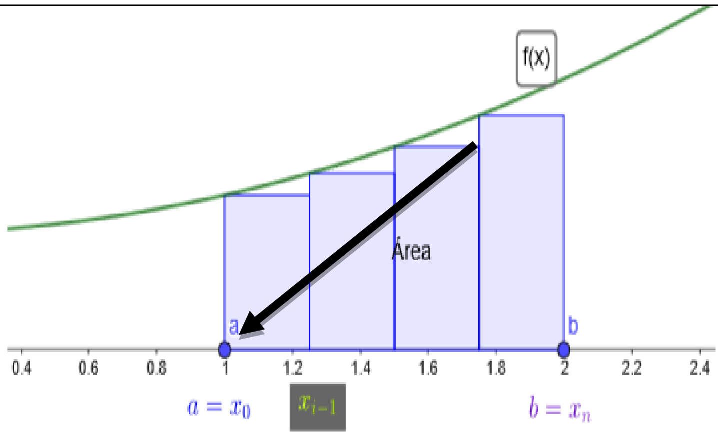
En cada subintervalo $[x_{n-1}, x_n]$ $(para\ i = 1,2,3 \ldots n)$, construya un rectángulo con anchura Δx y altura igual a $f(x_{i-1})$, que es el valor de la función en el punto del extremo izquierdo del subintervalo. Entonces el área de este rectángulo es $f(x_{i-1})\Delta x$. Al sumar las áreas de todos estos rectángulos, obtenemos un valor aproximado de A.

Tomar en cuenta para calcular la anchura del rectángulo $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.

Utilizamos la notación S_i para denotar que se trata de una aproximación del punto del extremo izquierdo de A utilizando n subintervalos.

$$A \approx S_i = f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x +, \ldots . + f(x_{n-1})\Delta x.$$

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}) * \Delta x$$



Sumas Superiores

Aproximaciones sumas superiores

Construir un rectángulo en cada subintervalo $[x_{n-1}, x_n]$, solo que esta vez la altura del rectángulo está determinada por el valor de la función $f(x_i)$, en el punto del extremo derecho del subintervalo.

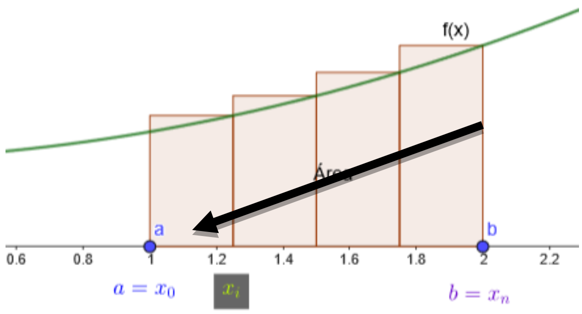
Tomar en cuenta para calcular la anchura del rectángulo $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.

Entonces, el área de cada rectángulo es $f(x_i)\Delta x$ y la aproximación para A está dada por

$$A \approx S_p = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x +, \ldots . + f(x_n)\Delta x.$$

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i) * \Delta x$$

La notación S_p indica que se trata de una aproximación en el punto del extremo derecho de A.



Suma puntos medios

Aproximaciones sumas puntos medios

La aproximación de áreas mediante el método del punto medio es una técnica numérica utilizada en cálculo para estimar el área bajo una curva o una función. Esta técnica se basa en dividir el área en subintervalos y calcular el valor de la función en el punto medio de cada subintervalo. Luego, se multiplica este valor por el ancho del subintervalo y se suma todas estas áreas de rectángulos para obtener una aproximación del área bajo la curva.

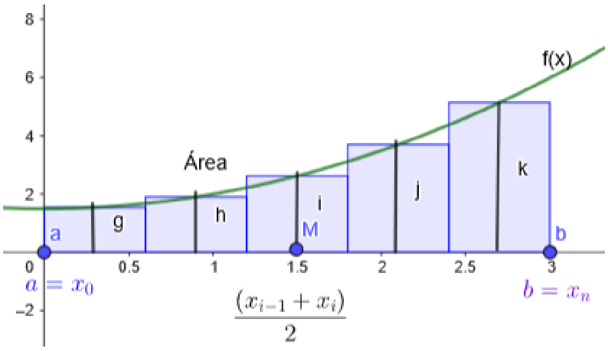
Tomar en cuenta para calcular la anchura del rectángulo $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.

La fórmula general para calcular la aproximación del área mediante el método del punto medio es:

Entonces, el área de cada rectángulo es $f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)\Delta x$ y la aproximación para *A* está dada por.

$$A \approx S_p = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x +, \dots . + f(x_n)\Delta x.$$

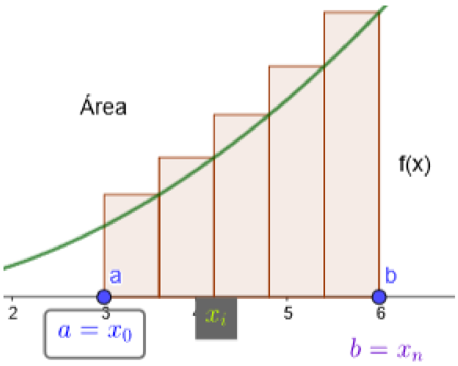
$$A_{Pm} = \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) * (\Delta x)$$



- Relación entre sumas superiores e inferiores

La suma superior de rectángulos (S_1) siempre será mayor o igual que la suma inferior de rectángulos (S_2) para cualquier función continua en un intervalo $[a, b]$.

En otras palabras, $S_1 \geq S_2$. Esto se debe a que, al tomar el valor máximo de la función en cada subintervalo para calcular la suma superior y el valor mínimo de la función en cada subintervalo para calcular la suma inferior, la suma superior captura más área que la suma inferior.

	Cierre: Aplicación- Evaluación: Duración: 15-20 min - Resolver los siguientes ejercicios planteados Supongamos que queremos aproximar el área bajo la curva de la función $f(x) = \frac{x^2}{2}$ en el intervalo $[3,6]$, utilizando 5 rectángulos con sumas superiores. Resolución de ejercicio. - Graficar la función y trazar los rectángulos superiores  Lo siguiente que se debe realizar es calcular el ancho de cada rectángulo. $$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$ Sabemos que los valores de nuestro intervalo son $a = 3$, $b = 6$ y $n = 5$ siendo n el número de rectángulos que se necesitan para calcular el área aproximada. Calculo el ancho de cada rectángulo **Remplazo valores:** $$\Delta x = \frac{6-3}{5}$$ $$\Delta x = \frac{3}{\mathbf{5}}$$ Ahora calcularemos los subintervalos de cada extremo.

$$[3, 3.6], [3.6, 4.2], [4.2, 4.8], [4.8, 5.4], [5.4, 6]$$

Por consiguiente, utilizaremos utilizamos los valores superiores.

Utilizaremos $f(x) = \frac{x^2}{2}$ y Δx para hallar S_i en este caso el área bajo la curva.

$$f(x_1) = \left(\frac{(3.6)^2}{2}\right) = 6.48$$

$$f(x_2) = \left(\frac{(4.2)^2}{2}\right) = 8.82$$

$$f(x_3) = \left(\frac{(4.8)^2}{2}\right) = 11.52$$

$$f(x_4) = \left(\frac{(5.4)^2}{2}\right) = 14.58$$

$$f(x_5) = \left(\frac{(6)^2}{2}\right) = 18$$

Realizamos la suma de los resultados.

Y multiplicamos por el ancho de cada rectángulo

$$S_s = \sum_{n=1}^{5} f(x_i) * \Delta x$$

Remplazo los datos en la formula

$$S_s = (59.4)(0.6)$$

$$S_s = 35.64$$

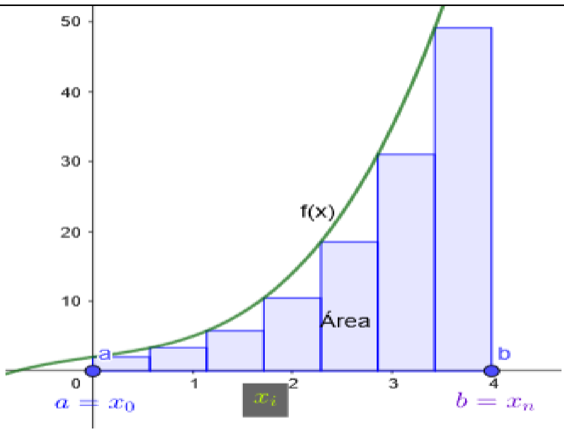
Entonces el área aproximada es

$$A \approx 35.64\, u^2$$

Supongamos que queremos aproximar el área bajo la curva de la función $f(x) = x^3 + 2x + 2$ en el intervalo $[0,4]$, utilizando 7 rectángulos con cualquier suma inferior.

Resolución de ejercicio. -

Graficar la función y trazar los rectángulos inferiores.



Lo siguiente que se debe realizar es calcular el ancho de cada rectángulo.

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

Sabemos que los valores de nuestro intervalo son $a = 0$, $b = 4$ y $n = 7$ siendo n el número de rectángulos que se necesitan para calcular el área aproximada.

Cálculo el ancho de cada rectángulo

Remplazo valores:

$$\Delta x = \frac{4-0}{7}$$

$$\Delta x = \frac{4}{\mathbf{7}}$$

Ahora calcularemos los subintervalos de cada extremo.

[0, 0.571], [0.571, 1.143], [1.143, 1.714], [1.714, 2.286], [2.286,2.857]
[2.857, 3.429][3.429,4]

Por consiguiente, utilizaremos utilizamos los valores inferiores.

Utilizaremos $f(x) = \frac{x^2}{2}$ y Δx para hallar S_i en este caso el área bajo la curva.

$$f(x_0) = (0)^3 + 2(0) + 2 = 2$$

$$f(x_1) = (0.571)^3 + 2(0.571) + 2 = 3.329$$

$$f(x_2) = (1.143)^3 + 2(1.431) + 2 = 5.778$$

$$f(x_3) = (1.714)^3 + 2(1.714) + 2 = 10.466$$

$$f(x_4) = (2.286)^3 + 2(2.286) + 2 = 18.513$$

$$f(x_5) = (2.857)^3 + 2(2.857) + 2 = 31.038$$

	$$f(x_6) = (3.429)^3 + 2(3.429) + 2 = 49.160$$ Realizamos la suma de los resultados. Y multiplicamos por el ancho de cada rectángulo $$S_s = \sum_{n=1}^{7} f(x_i) * \Delta x$$ Remplazo los datos en la formula $$S_s = (120.285)(0.571)$$ $$S_s = 68.734$$ Entonces el área aproximada es $$A \approx 683734\ u^2$$ Ejercicio: Supongamos que queremos aproximar el área bajo la curva de la función $f(x) = x^3 + 2x^2$en el intervalo $[-2,\ 0]$, utilizando 5 rectángulos con sumas inferiores - Anima a los estudiantes a hacer preguntas, proponer ejemplos y discutir cómo pueden aplicar este concepto en otras situaciones.

ACTIVIDADES A DESARROLAR EN CLASES

Recomendación para aplicación:

Estas preguntas y actividades ayudarán a los estudiantes a comprender mejor las sumas inferiores y superiores en el contexto del cálculo y cómo se relacionan con el cálculo de integrales.

Actividades:

Aquí te propongo varias preguntas y actividades que puedes realizar en el aula de clases para trabajar el tema de sumas inferiores y superiores en cálculo:

Preguntas conceptuales:

- ¿Qué es una suma inferior en cálculo?

  Esta inferior suma proporciona una estimación conservadora del área real bajo la curva, ya que estamos tomando el valor mínimo de la función en pasa subintervalo. A medida que el número de subintervalos n aumenta o la partición del intervalo se hace más fina, la suma inferior se acerca más al valor real del área de la curvada y se convierte en la integral definida en el límite.

- ¿Qué es una suma superior en cálculo?

  Esta suma superior proporciona una estimación exagerada o superior del área real bajo la curva, ya que estamos tomando el valor máximo de la función en cada subintervalo. A medida que el número de subintervalos n aumenta o la partición del intervalo se hace más fina, la suma superior se acerca más al valor real del área bajo la curva y se convierte en la integral definida en el límite.

- ¿Cómo se relacionan las sumas inferiores y superiores con el cálculo de integrales?

  las sumas inferiores y superiores proporcionan aproximaciones que se vuelven cada vez más precisas a medida que aumenta el número de subintervalos y se acercan al valor real del área bajo la curva.

Preguntas sobre particiones del área bajo la curva:

- ¿Qué sucede con la suma inferior y superior si dividimos el intervalo en más subintervalos?
-

  A mayor número de rectángulos más aproximada será el área bajo la curva que se desea calcular

- ¿Cómo afecta el tamaño de los subintervalos a la precisión de las sumas inferiores y superiores?

  Cuantos más subintervalos se utilicen, más se acercará la aproximación al valor real del área bajo la curva.

Actividad de aproximación de área:

- Dibuja una función continua en un intervalo [a, b]. Divide este intervalo en subintervalos más pequeños y calcula la suma de las áreas de los rectángulos inferiores y superiores para aproximar el área bajo la curva.

Ejemplo de cálculo de sumas inferiores y superiores:

- Elige una función específica y un intervalo. Calcula la suma inferior y superior en ese intervalo y compara los resultados. Discute cómo estos cálculos te dan una aproximación de la integral de la función en ese intervalo.

Para revisar más material dirigirse a anexo 2 en adelante:

6.5.2 Contenidos de los temas revisados a partir del sílabo

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CHIMBORAZO

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACION HUMANAS Y TECNOLOGIAS

PEDAGOGÍA DE LAS CIENCIAS EXPERIMENTALES:

MATEMÁTICAS Y LA FÍSICA

AUTOR:

ELVIS GUSTAVO GUAIRACAJA RAMIREZ

ASIGNATURA:

CÁLCULO INTEGRAL

TEMA:

SUMATORIAS

SUMATORIAS

Definición:

Una sumatoria, está representada por el símbolo griego sigma ($\sum$), es una forma de expresar la adición de una secuencia de términos. Esta notación es fundamental en matemáticas y se utiliza para sumar una serie de números o expresiones.

La expresión general de la sumatoria es:

$$\sum_{i=n_1}^{n} X_i = n$$

Donde:

i es la variable de la sumatoria que toma valores desde n_1 hasta n.
$n_1$es el primer valor de i.
n es el último valor de i.
X_i es la expresión que se suma para cada valor de i.

Sumatoria de una constante:

$$\sum_{i=1}^{n} c = c + c + c + \cdots + c$$

Sumando c en un total de n veces.

Sumatoria de los primeros n números naturales:

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$$

Sumatoria de cuadrados:

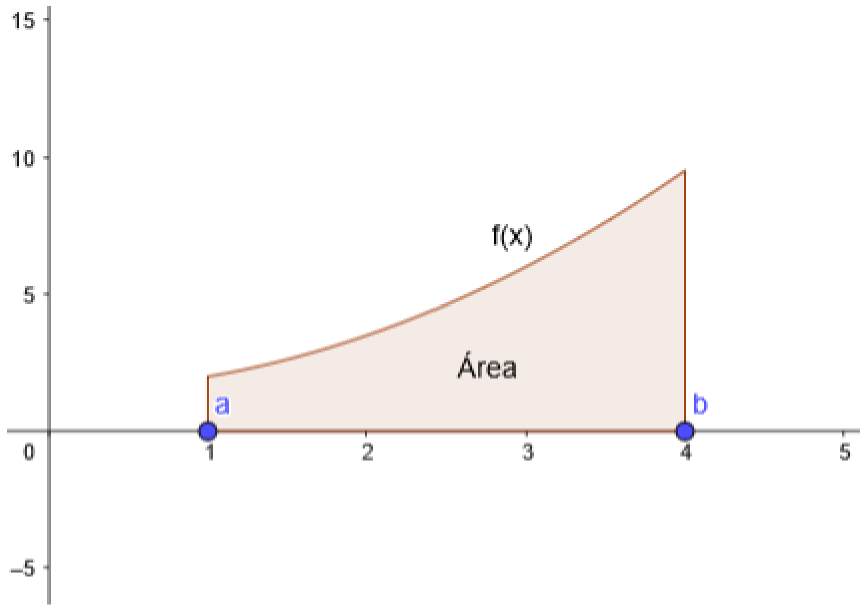
$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = i^2 + i^2 + i^2 + \cdots + n^2$$

Sumatoria de una secuencia dada:

$$\sum_{i=1}^{5} (2i - 1) = (2(1) - 1) + (2(2) - 1) + (2(3) - 1) + \cdots + (2(5) - 1)$$

Aproximación del área

Como describe Medkov (1977) en su libro asumimos que $f(x)$ es una función continua y no negativa definida en el intervalo cerrado $[a, b]$ Queremos aproximar el área A delimitada por $f(x)$ arriba, el eje abajo, la línea $x = a$ a la izquierda, y la línea $x = b$ a la derecha (p. 450).



Para aproximar el área bajo esta curva utilizando un enfoque geométrico este método se basa en subdividir la región en rectángulos al agregar estas áreas obtenemos una aproximación del área total debajo de la curva.

Definición

Nos mención Cuorant y Fritz (2017) Un conjunto de puntos $P = \{x_i\}$ por $i = 1,2,3 \ldots n$ con $a = x_0 < x_1 < x_2 <, \ldots < x_n = b$, que divide el intervalo $[a, b]$ en subintervalos de la forma $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, … $[x_{n-1}, x_n]$ se llama una partición de $[a, b]$. Si todos los subintervalos tienen la misma anchura, el conjunto de puntos forma una partición regular del intervalo $[a, b]$.

Aproximaciones sumas inferiores

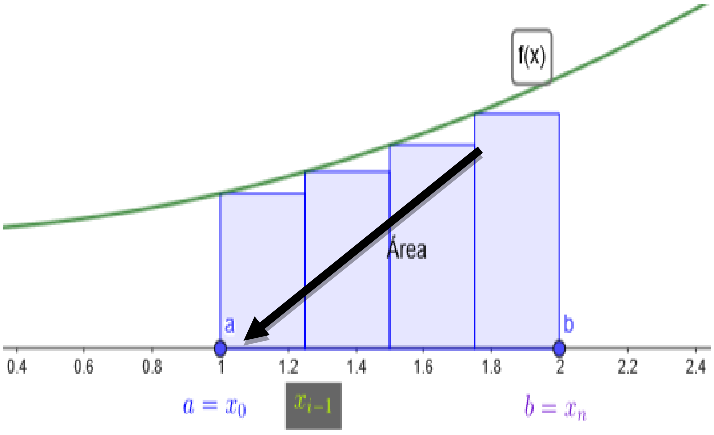
En cada subintervalo $[x_{n-1}, x_n]$ $(para\ i = 1,2,3 \ldots n)$, construya un rectángulo con anchura Δx y altura igual a $f(x_{i-1})$, que es el valor de la función en el punto del extremo izquierdo del subintervalo. Entonces el área de este rectángulo es $f(x_{i-1})\Delta x$. Al sumar las áreas de todos estos rectángulos, obtenemos un valor aproximado de A.

Tomar en cuenta para calcular la anchura del rectángulo $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.

Utilizamos la notación S_i para denotar que se trata de una aproximación del punto del extremo izquierdo de A utilizando n subintervalos.

$$A \approx S_i = f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x +, \ldots . + f(x_{n-1})\Delta x.$$

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}) * \Delta x$$



Aproximaciones sumas superiores

Construir un rectángulo en cada subintervalo $[x_{n-1}, x_n]$, solo que esta vez la altura del rectángulo está determinada por el valor de la función $f(x_i)$, en el punto del extremo derecho del subintervalo.

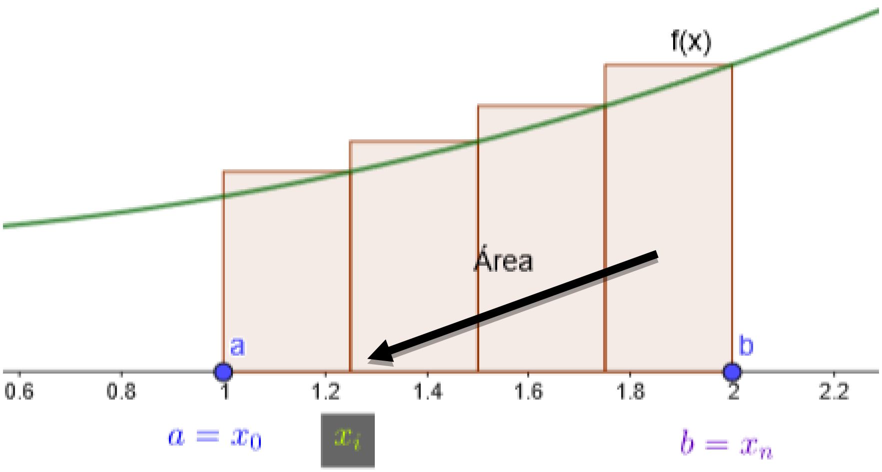
Tomar en cuenta para calcular la anchura del rectángulo $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.

Entonces, el área de cada rectángulo es $f(x_i)\Delta x$ y la aproximación para A está dada por

$$A \approx S_p = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x +, \dots . + f(x_n)\Delta x.$$

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i) * \Delta x$$

La notación S_p indica que se trata de una aproximación en el punto del extremo derecho de A.



Aproximaciones sumas puntos medios

La aproximación de áreas mediante el método del punto medio es una técnica numérica utilizada en cálculo para estimar el área bajo una curva o una función. Esta técnica se basa en dividir el área en subintervalos y calcular el valor de la función en el punto medio de cada subintervalo. Luego, se multiplica este valor por el ancho del subintervalo y se suma todas estas áreas de rectángulos para obtener una aproximación del área bajo la curva.

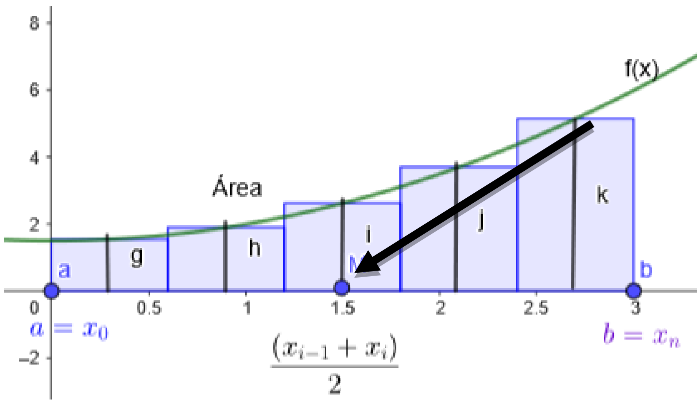
Tomar en cuenta para calcular la anchura del rectángulo $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.

La fórmula general para calcular la aproximación del área mediante el método del punto medio es:

Entonces, el área de cada rectángulo es $f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)\Delta x$ y la aproximación para A está dada por.

$$A \approx S_p = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x +, \ldots. + f(x_n)\Delta x.$$

$$A_{Pm} = \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right) * (\Delta x)$$



Sumas inferiores.

Resolución del ejercicio:

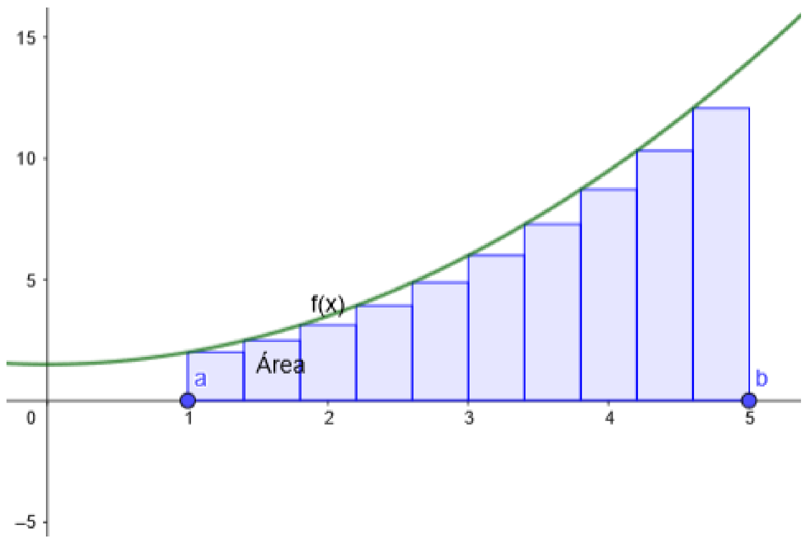
Supongamos que queremos aproximar el área bajo la curva de la función $f(x) = \frac{3+x^2}{2}$ en el intervalo $[1,5]$, utilizando 10 rectángulos con sumas inferiores.

Paso 1:

Para la resolución del ejercicio es importante revisar los contenidos previos en donde se detalla los símbolos que se utilizaran en su desarrollo.

Empezaremos graficando la función y los 10 rectángulos.

Tomando en cuenta el intervalo que va de $[1,5]$.



Aquí tener en cuenta que mientras más rectángulos utilicen más aproximado será el área al valor real.

Paso 2:

Calculamos la anchura de cada rectángulo de la siguiente manera:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

Sabemos que los valores de nuestro intervalo son $a = 1$, $b = 5$ y $n = 10$ siendo n el número de rectángulos que se necesitan para calcular el área aproximada.

Remplazo valores:

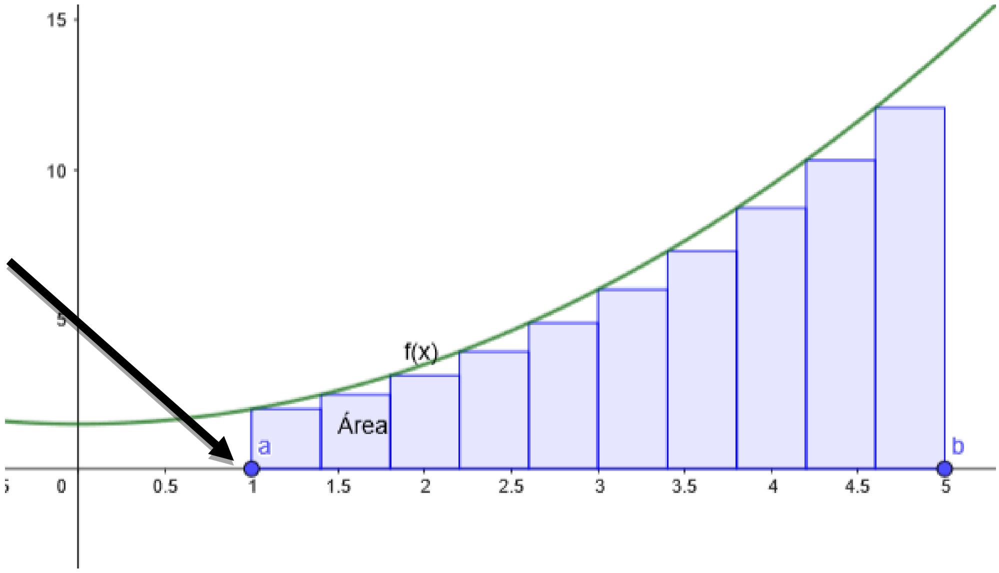
$$\Delta x = \frac{5-1}{10}$$

$$\Delta x = \frac{2}{\mathbf{5}}$$

Una vez ya calculado el valor de Δx vamos a revisar la función.

Paso 3:

Utilizando el valor del extremo izquierdo de la gráfica el que se indica con la flecha:



Los subintervalos son:

[1,1.4], [1.4,1.8], [1.8,2.2], [2.2,2.6], [2.6,3][3,3.4], [3.4,3.8], [3.8,4.2], [4.2,4.6], [4.6,5]

Para lo siguiente tomaremos solo los extremos de la izquierda.

Utilizaremos $f(x) = \frac{3+x^2}{2}$ y Δx para hallar S_i en este caso el área bajo la curva.

$$f(x_0) = \left(\frac{3+(1)^2}{2}\right)(0.4) = \frac{4}{5}$$

$$f(x_1) = \left(\frac{3+(1.4)^2}{2}\right)(0.4) = \frac{124}{125}$$

$$f(x_2) = \left(\frac{3+(1.8)^2}{2}\right)(0.4) = \frac{156}{125}$$

$$f(x_3) = \left(\frac{3+(2.2)^2}{2}\right)(0.4) = \frac{196}{125}$$

$$f(x_4) = \left(\frac{3+(2.6)^2}{2}\right)(0.4) = \frac{244}{125}$$

$$f(x_5) = \left(\frac{3+(3)^2}{2}\right)(0.4) = \frac{12}{5}$$

$$f(x_6) = \left(\frac{3+(3.4)^2}{2}\right)(0.4) = \frac{364}{125}$$

$$f(x_7) = \left(\frac{3+(3.8)^2}{2}\right)(0.4) = \frac{436}{125}$$

$$f(x_8) = \left(\frac{3 + (4.2)^2}{2}\right)(0.4) = \frac{516}{125}$$

$$f(x_9) = \left(\frac{3 + (4.6)^2}{2}\right)(0.4) = \frac{604}{125}$$

Para obtener el valor de aproximado del área se obtiene de la siguiente manera:

$$A \approx S_i$$

$$S_i = \sum_{n=1}^{10} f(x_{i-1}) * \Delta x$$

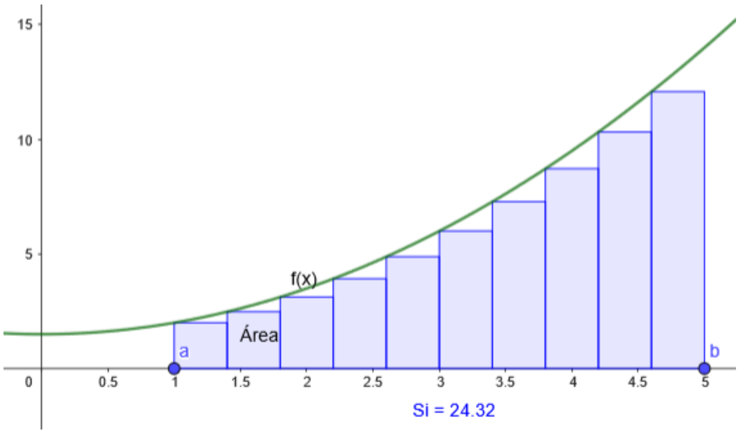
$$S_i = f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) + f(x_5) +, \ldots + f(x_9)$$

$$S_i = \frac{606}{25}$$

Entonces el área aproximada es

$$A \approx 24.32\ u^2$$

Y lo podemos comprobar con GeoGebra.



Que utilizando la suma inferior de rectángulos nos da el valor aproximado del área que es $A \approx 24.32\ u^2$.

Suma superior.

Resolución del ejercicio:

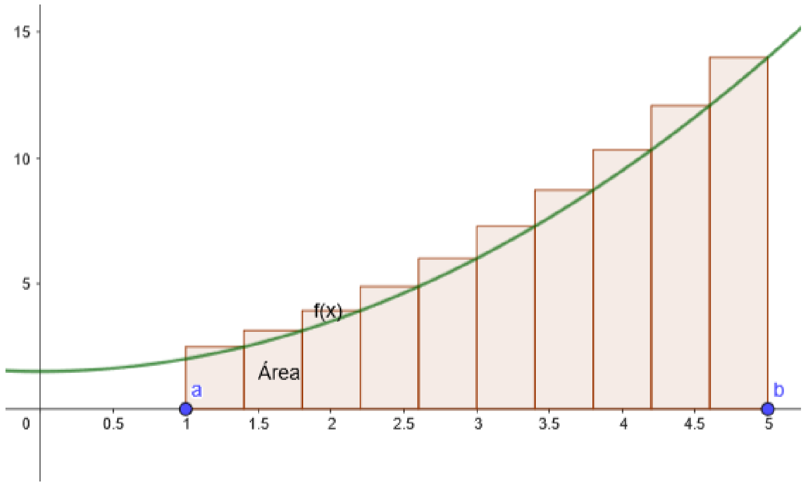
Supongamos que queremos aproximar el área bajo la curva de la función $f(x) = \frac{3+x^2}{2}$ en el intervalo $[1,5]$, utilizando 10 rectángulos con sumas superiores.

Paso 1:

Para la resolución del ejercicio es importante revisar los contenidos previos en donde se detalla los símbolos que se utilizaran en su desarrollo.

Empezaremos graficando la función y los 10 rectángulos.

Tomando en cuenta el intervalo que va de $[1,5]$.



Aquí tener en cuenta que mientras más rectángulos utilicen más aproximado será el área al valor real.

Paso 2:

Calculamos la anchura de cada rectángulo de la siguiente manera:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

Sabemos que los valores de nuestro intervalo son $a = 1$, $b = 5$ y $n = 10$ siendo n el número de rectángulos que se necesitan para calcular el área aproximada.

Remplazo valores:

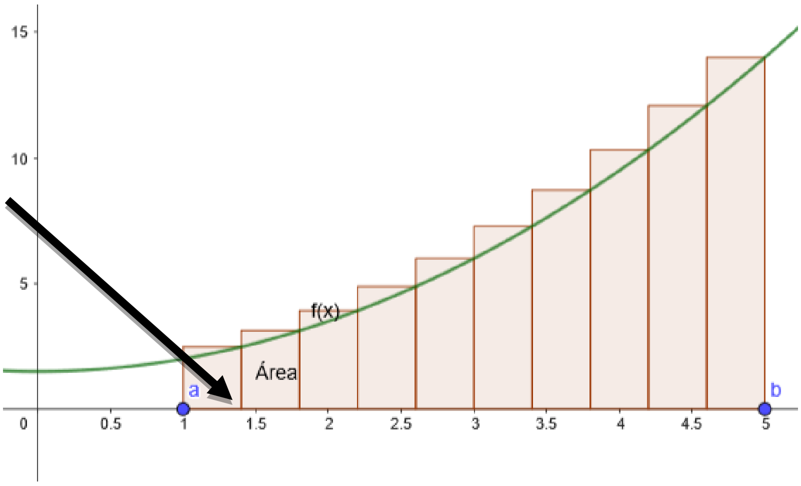
$$\Delta x = \frac{5-1}{10}$$

$$\Delta x = \frac{2}{\mathbf{5}}$$

Una vez ya calculado el valor de Δx vamos a revisar la función.

Paso 3:

Utilizando el valor del extremo derecho de la gráfica el que se indica con la flecha:



Los subintervalos son:

[1,1.4], [1.4,1.8], [1.8,2.2], [2.2,2.6], [2.6,3][3,3.4], [3.4,3.8], [3.8,4.2], [4.2,4.6], [4.6,5]

Para lo siguiente tomaremos solo los extremos de la derecha.

Utilizaremos $f(x) = \frac{3+x^2}{2}$ y Δx para hallar S_s en este caso el área bajo la curva.

$$f(x_1) = \left(\frac{3 + (1.4)^2}{2}\right)(0.4) = \frac{124}{125}$$

$$f(x_2) = \left(\frac{3 + (1.8)^2}{2}\right)(0.4) = \frac{156}{125}$$

$$f(x_3) = \left(\frac{3 + (2.2)^2}{2}\right)(0.4) = \frac{196}{125}$$

$$f(x_4) = \left(\frac{3 + (2.6)^2}{2}\right)(0.4) = \frac{244}{125}$$

$$f(x_5) = \left(\frac{3 + (3)^2}{2}\right)(0.4) = \frac{12}{5}$$

$$f(x_6) = \left(\frac{3 + (3.4)^2}{2}\right)(0.4) = \frac{364}{125}$$

$$f(x_7) = \left(\frac{3 + (3.8)^2}{2}\right)(0.4) = \frac{436}{125}$$

$$f(x_8) = \left(\frac{3 + (4.2)^2}{2}\right)(0.4) = \frac{516}{125}$$

$$f(x_9) = \left(\frac{3 + (4.6)^2}{2}\right)(0.4) = \frac{604}{125}$$

$$f(x_{10}) = \left(\frac{3 + (5)^2}{2}\right)(0.4) = \frac{28}{5}$$

Para obtener el valor de aproximado del área se obtiene de la siguiente manera:

$$A \approx S_s$$

$$S_s = \sum_{n=1}^{10} f(x_i) * \Delta x$$

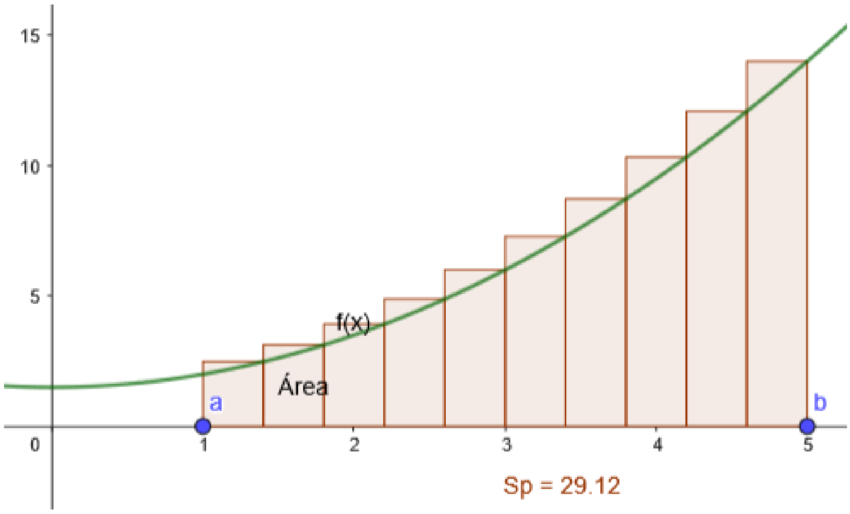
$$S_s = f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) + f(x_5) + f(x_6) +, \dots + f(x_{10})$$

$$S_s = \frac{728}{25}$$

Entonces el área aproximada es

$$A \approx 29.12\ u^2$$

Y lo podemos comprobar con GeoGebra.



Que utilizando la suma superior de rectángulos nos da el valor aproximado del área que es $A \approx 29.12\ u^2$.

Suma puntos medios.

Resolución del ejercicio:

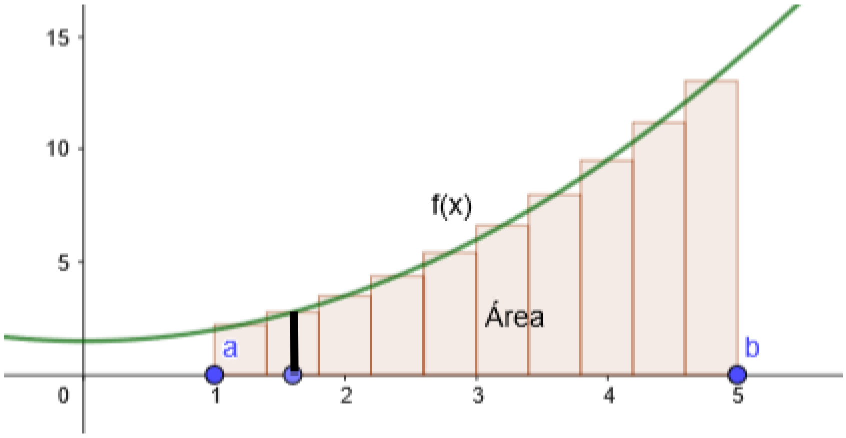
Supongamos que queremos aproximar el área bajo la curva de la función $f(x) = \frac{3+x^2}{2}$ en el intervalo $[1,5]$, utilizando 10 rectángulos con suma de puntos medios.

Paso 1:

Para la resolución del ejercicio es importante revisar los contenidos previos en donde se detalla los símbolos que se utilizaran en su desarrollo.

Empezaremos graficando la función y los 10 rectángulos.

Tomando en cuenta el intervalo que va de $[1,5]$.



Aquí tener en cuenta que mientras más rectángulos utilicen más aproximado será el área al valor real.

Paso 2:

Calculamos la anchura de cada rectángulo de la siguiente manera:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

Sabemos que los valores de nuestro intervalo son $a = 1$, $b = 5$ y $n = 10$ siendo n el número de rectángulos que se necesitan para calcular el área aproximada.

Remplazo valores:

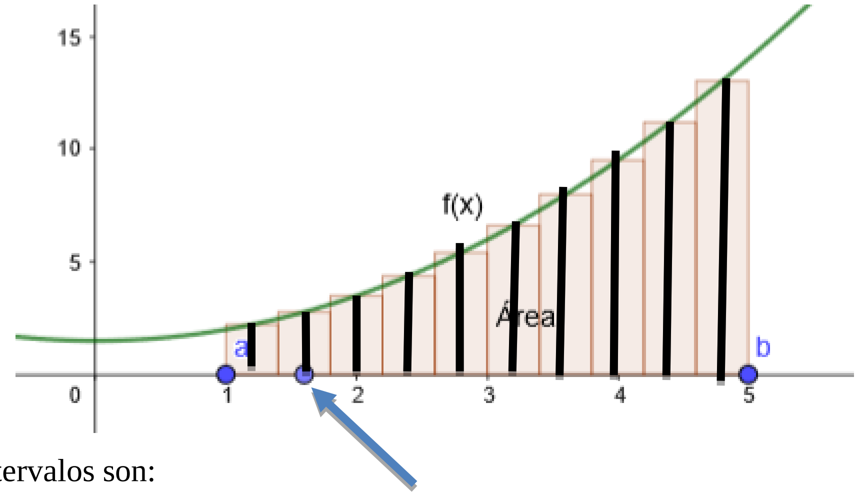
$$\Delta x = \frac{5-1}{10}$$

$$\Delta x = \frac{2}{\mathbf{5}}$$

Una vez ya calculado el valor de Δx vamos a revisar la función.

Paso 3:

Utilizando el valor del punto medio de la gráfica el que se indica con la flecha:



Los subintervalos son:

[1,1.4], [1.4,1.8], [1.8,2.2], [2.2,2.6], [2.6,3][3,3.4], [3.4,3.8], [3.8,4.2], [4.2,4.6], [4.6,5]

De estos intervalos sacar el punto medio utilizando $\frac{x_{i-1}+x_i}{2}$.

Remplazamos valores lo que da lo siguiente

$$x_{pm} = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$$

$$x_1 = \frac{1 + 1.4}{2}$$

$$x_1 = 1.2$$

Y así seguimos con los demás intervalos para encontrar los siguientes puntos medios

$$[1.2, 1.6, 2, 2.4, 2.8, 3.2, 3.6, 4, 4.4, 4.8]$$

Para lo siguiente tomaremos los puntos medios y evaluemos en la función.

Utilizaremos $f(x) = \frac{3+x^2}{2}$ y Δx para hallar S_{pm} en este caso el área bajo la curva.

$$f(x_1) = \left(\frac{3 + (1.2)^2}{2}\right)(0.4) = \frac{111}{125}$$

$$f(x_2) = \left(\frac{3 + (1.6)^2}{2}\right)(0.4) = \frac{139}{125}$$

$$f(x_3) = \left(\frac{3 + (2)^2}{2}\right)(0.4) = \frac{7}{5}$$

$$f(x_4) = \left(\frac{3 + (2.4)^2}{2}\right)(0.4) = \frac{219}{125}$$

$$f(x_5) = \left(\frac{3 + (2.8)^2}{2}\right)(0.4) = \frac{271}{125}$$

$$f(x_6) = \left(\frac{3 + (3.2)^2}{2}\right)(0.4) = \frac{331}{125}$$

$$f(x_7) = \left(\frac{3 + (3.6)^2}{2}\right)(0.4) = \frac{399}{125}$$

$$f(x_8) = \left(\frac{3 + (4)^2}{2}\right)(0.4) = \frac{19}{5}$$

$$f(x_9) = \left(\frac{3 + (4.4)^2}{2}\right)(0.4) = \frac{559}{125}$$

$$f(x_{10}) = \left(\frac{3 + (4.8)^2}{2}\right)(0.4) = \frac{651}{125}$$

Para obtener el valor de aproximado del área se obtiene de la siguiente manera:

$$A \approx S_{pm}$$

$$S_{pm} = \sum_{n=1}^{10} f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) * \Delta x$$

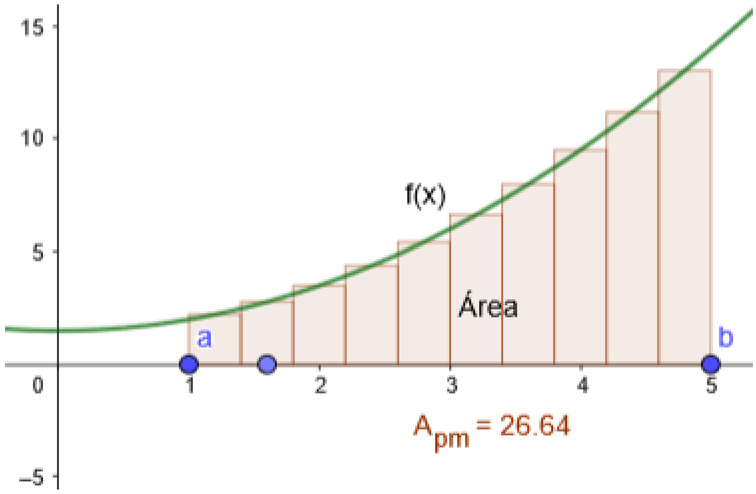
$$S_s = f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) + f(x_5) + f(x_6) +, \dots + f(x_{10})$$

$$S_{pm} = \frac{666}{25}$$

Entonces el área aproximada es

$$A \approx 26.64\ u^2$$

Y lo podemos comprobar con GeoGebra.



Que utilizando la suma puntos medios de rectángulos nos da el valor aproximado del área que es $A \approx 26.64\ u^2$.

Bibliografía

Aburto, P. (2021). *UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE NICARAGUA.* https://www.google.com/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=&ved=2ahUKEwjE2pXTv86BAxWsUjABHRRjA0wQFnoECC8QAw&url=https%3A%2F%2Fwww.unan.edu.ni%2Fwp-content%2Fuploads%2Fplaneamiento-didactico-060421-1421.pdf&usg=AOvVaw0SjKbJN5MZURNeDBpO5AEx&opi=89978449

Chapra, S. C., y Raymond , C. P. (2015). *Métodos númericos para ingenieros* . McGRAW-HILL/INTERAMERICANA EDITORES, S.A. DE C.V. https://doi.org/978-607-15-1294-9

Chipantiza Urquizo, J. R. (Junio de 2021). *Aplicación del aula invertida para mejorar el proceso enseñanza-aprendizaje de las matemáticas de los estudiantes del noveno año de EGB de Pelileo.* Repositorio PUCESA: https://repositorio.pucesa.edu.ec/handle/123456789/3224

Cóndor Chicaiza, M., Valladares Perugachi, L., Ulcuango Ashqui, M., Rovalino Robalino, M., y Velasco Bazantes, L. (2023). s beneficios y desafíos de la implementación de la clase inversa en la educación secundaria. *GADE, 3*(4), 356-369. https://doi.org/ISSN:2745-2891

Para revisar más material dirigirse a partir del anexo 7:

6.5.3 Guion de videos

Guion para elaboración de material visual de sumatorias.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CHIMBORAZO

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACION HUMANAS Y TECNOLOGIAS

PEDAGOGÍA DE LAS CIENCIAS EXPERIMENTALES:

MATEMÁTICAS Y LA FÍSICA

AUTOR:

ELVIS GUSTAVO GUAIRACAJA RAMIREZ

ASIGNATURA:

CÁLCULO INTEGRAL

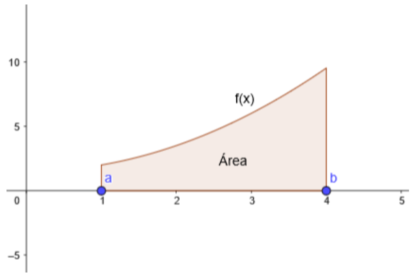
TEMA:

GUION VIDEO APROXIMACIÓN MEDIANTE RECTANGULOS

Planificar y Diseñar: Aproximación de áreas mediante rectángulos

<table>
<tr><td colspan="5">Guion de video</td></tr>
<tr><td>IMAGEN</td><td colspan="2">AUDIO</td><td></td><td>TIEMPO</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">SONIDO</td><td>TEXTO</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Titulo: Caratula de la presentación realizada en Power point.</td><td>Audio externo:</td><td>Narrador:</td><td rowspan="2">CARATULA:
Saludo inicial a los estudiantes a quienes va dirigido el video.</td><td rowspan="2">30 s</td></tr>
<tr><td></td><td>Elvis Guairacaja</td></tr>
<tr><td>Titulo: Caratula de la presentación realizada en Power point.</td><td></td><td>Elvis Guairacaja</td><td>CARATULA:
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CHIMBORAZO
PEDAGOGÍA DE LAS CIENCIAS EXPERIMENTALES MATEMÁTICAS Y FÍSICA
Por: Elvis Guairacaja
CALCULO INTEGRAL
Curso:
Quinto semestre</td><td>30 s</td></tr>
<tr><td>Titulo: Página de motivación en la presentación power point.</td><td></td><td>Elvis Guairacaja</td><td>PAGINA 1:
Ayuda a los estudiantes a establecer metas realistas y alcanzables para la clase.
Destaca cómo la comprensión de la integral definida será útil en futuras clases de cálculo.</td><td>30 s</td></tr>
<tr><td>Titulo: Pagina de</td><td></td><td>Elvis Guairacaja</td><td>PAGINA 1:</td><td>30 s</td></tr>
</table>

experiencia en la presentación.			Análisis de conocimientos previos: Proporciona ejemplos simples para ilustrar cómo funciona el cálculo de áreas bajo una región sombreada.	
Titulo: Página de reflexión en la presentación.		Elvis Guairacaja	P**AGINA 1:** Realizar preguntas que les permita analizar el tema de aproximación áreas mediante rectángulos: ¿Han descubierto nuevas aplicaciones o han ampliado su comprensión?	1 min
Titulo: Conceptualización Sumatorias		Elvis Guairacaja	P**AGINA 2:** **SUMATORIAS** **Definición:** **Definición:** Una sumatoria, está representada por el símbolo griego sigma (∑), es una forma de expresar la adición de una secuencia de términos. Esta notación es fundamental en matemáticas y se utiliza para sumar una serie de números o expresiones. La expresión general de la sumatoria es: $$\sum_{i=0}^{n} x_i = n$$ **Donde:** i es la variable de la sumatoria que toma valores desde n_1 hasta n. 0 es el primer valor de i. n es el último valor de i. X_i es la expresión que se suma para cada valor de i.	3 min
Titulo: Conceptualización		Elvis Guairacaja	P**AGINA 3:** **Aproximación de areas** Para aproximar el área bajo esta curva utilizando	1 min

Aproximación de área			un enfoque geométrico este método se basa en subdividir la región en rectángulos al agregar estas áreas obtenemos una aproximación del área total debajo de la curva. Un conjunto de puntos $P = \{x_i\}$ por $i = 1,2,3 \dots n$ con $a = x_0 < x_1 < x_2 <, \dots < x_n = b$, que divide el intervalo $[a, b]$ en subintervalos de la forma $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, … $[x_{n-1}, x_n]$ se llama una partición de $[a, b]$. Si todos los subintervalos tienen la misma anchura, el conjunto de puntos forma una partición regular del intervalo $[a, b]$. 	
Titulo: Conceptualización Aproximaciones sumas inferiores		Elvis Guairacaja	PAGINA 4: Se relata los siguientes elementos presentes en la página. Aproximaciones sumas inferiores: En cada subintervalo $[x_{n-1}, x_n]$ $(para\ i = 1,2,3 \dots n)$, construya un rectángulo con anchura Δx y altura igual a $f(x_{i-1})$, que es el valor de la función en el punto del extremo izquierdo del subintervalo. Entonces el área de este rectángulo es $f(x_{i-1})\Delta x$. Al sumar las áreas de todos estos rectángulos, obtenemos un valor aproximado de A. $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ $A \approx S_i = f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x +, \dots . + f(x_{n-1})\Delta x.$ $A \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}) * \Delta x$	2 min
Titulo: Conceptuali		Elvis Guairacaja	**PAGINA 5-6:** Se relata los siguientes elementos presentes en la	2 min

zación Aproximaciones sumas superiores			página. Aproximaciones sumas superiores: Construir un rectángulo en cada subintervalo $[x_{n-1}, x_n]$, solo que esta vez la altura del rectángulo está determinada por el valor de la función $f(x_i)$, en el punto del extremo derecho del subintervalo. $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ $A \approx S_p = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x +, \dots. + f(x_n)\Delta x.$ $A \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i) * \Delta x$	
Titulo: Conceptualización Aproximaciones sumas puntos medios		Elvis Guairacaja	**PAGINA 7:** Se relata los siguientes elementos presentes en la página. Aproximaciones sumas superiores: La aproximación de áreas mediante el método del punto medio es una técnica numérica utilizada en cálculo para estimar el área bajo una curva o una función. Esta técnica se basa en dividir el área en subintervalos y calcular el valor de la función en el punto medio de cada subintervalo. $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ $A \approx S_p = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x +, \dots. + f(x_n)\Delta x.$ $A_{Pm} = \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) * (\Delta x)$	2 min
Titulo: Aplicación. Sumas inferiores de		Elvis Guairacaja	**PAGINA 9-11:** Narración de la resolución del ejercicio paso a paso. **Sumas inferiores.**	5 min

rectángulos			Resolución del ejercicio: Supongamos que queremos aproximar el área bajo la curva de la función $f(x) = \frac{3+x^2}{2}$ en el intervalo $[1,5]$, utilizando 10 rectángulos con sumas inferiores.	
Titulo: Aplicación. Sumas superiores de rectángulos		Elvis Guairacaja	**PAGINA 13-15:** Narración de la resolución del ejercicio paso a paso. **Suma superior.** Resolución del ejercicio: Supongamos que queremos aproximar el área bajo la curva de la función $f(x) = \frac{3+x^2}{2}$ en el intervalo [1,5], utilizando 10 rectángulos con sumas superiores.	5 min
Titulo: Aplicación. Sumas puntos medios de rectángulos		Elvis Guairacaja	**PAGINA 17-19:** Narración de la resolución del ejercicio paso a paso.	5 min
Titulo: Aplicación. Comprobación de resultado		Elvis Guairacaja	**PAGINA 20:** Para comprobar el resultado final se puede utilizar una aplicación que permita graficar y calcular el área de la función mediante rectángulos. Ejercicio: $f(x) = \dfrac{3+x^2}{2}$	1 min
Titulo: Aplicación. Proponer un ejercicio.		Elvis Guairacaja	**PAGINA 21:** **Ejercicio propuesto:** Supongamos que queremos aproximar el área bajo la curva de la función $f(x) = x^3 + 2x^2$en el intervalo $[-2,\ 0]$, utilizando 5 rectángulos con sumas inferiores.	30 s

Titulo: Referencia.		Elvis Guairacaja	**PAGINA 22:** Se mencionarán, ilustraran libros que se utilizaron para revisión literaria.	30 s

DURACION DEL VIDEO	Se ocupará aproximadamente 22 min para desarrollar las actividades.
RECURSO MULTIMEDIA	Se utilizarán plataformas de presentación como Power Poin, Zoom.

Para revisar más material dirigirse a partir anexo 13:

6.5.4 Videos realizados

Material visual desarrollado del tema sumatorias.

Video acerca del tema de sumatorias para la unidad temática Integral definida.

Sumatoria Parte 1:

Enlace del recurso:

https://youtu.be/4Q0e4KkG25E

Figura 13

Video teoría de sumatorias

Nota: Realizado por el autor de este trabajo de investigación, Video con teoría de sumatoria de rectángulos.

Sumatoria parte 2:

Enlace del recurso:

https://youtu.be/jGtcMIEBQck

Figura 14

Video ejercicios de sumatoria rectángulos.

Nota: Realizado por el autor de este trabajo de investigación, Video con ejercios de sumatoria de rectángulos

6.6 Conclusiones y Recomendación

6.6.1 Conclusiones

- El desarrollo de material didáctico efectivo es clave para apoyar a los estudiantes en su proceso de comprensión y dominio de la integral definida.
- La provisión de una amplia gama de recursos es clave para promover un aprendizaje significativo y exitoso en el campo de la integral definida.
- Al utilizar recursos multimedia en la elaboración de material didáctico, se potencia el proceso de aprendizaje al ofrecer una base sólida y variada que promueve una comprensión más profunda y duradera de los temas tratados.
- El diseñar de actividades que fomenten la participación de los estudiantes es esencial para cultivar un ambiente de aprendizaje dinámico y enriquecedor que impulse su crecimiento intelectual y académico.

6.6.2 Recomendación

- Incorporar herramientas tecnológicas, como software de simulación, aplicaciones interactivas o plataformas en línea, puede enriquecer la experiencia de aprendizaje y hacer que los conceptos sean más accesibles y atractivos para los estudiantes.
- Promover la participación de los estudiantes en el proceso de aprendizaje es fundamental para consolidar su comprensión con trabajos colaborativos.
- Adaptar el material didáctico a las necesidades individuales de los estudiantes puede mejorar significativamente su comprensión.

BIBLIOGRAFÍA

Abad, E. (2020). El aula invertida: un desafío para la enseñanza universitaria. *UNC, 11*(20), 75-91. https://doi.org/1853-6530

Aburto, P. (2021). *UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE NICARAGUA.* https://www.google.com/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=&ved=2ahUKEwjE2pXTv86BAxWsUjABHRRjA0wQFnoECC8QAw&url=https%3A%2F%2Fwww.unan.edu.ni%2Fwp-content%2Fuploads%2Fplaneamiento-didactico-060421-1421.pdf&usg=AOvVaw0SjKbJN5MZURNeDBpO5AEx&opi=89978449

Aguilera, C. (2017). EL MODELO FLIPPED CLASSROOM. *INFAD*, 3.

Aguinaga, A. (2019). *Repositorio Digital UNCE.* https://www.google.com/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=&ved=2ahUKEwj7-ujb0a74AhWot4QIHTWGB8MQFnoECAUQAQ&url=http%3A%2F%2Fwww.dspace.uce.edu.ec%2Fbitstream%2F25000%2F18606%2F1%2FT-UCE-0011-ICF-012-P.pdf&usg=AOvVaw1Snq6RexSbCOCjEu27Iv23

Barrón, J. C., Basto, I. C., & Garro, L. L. (2021). Polya method in improving mathematical learning in elementary school students. *593 Digital Publisher*, 169.

Bragulat, E. J. (2000). *Análisis matemático de una variable Fundamentos y aplicaciones.* Edicions UPC eBooks. https://doi.org/10.5821/ebook-9788483019863

Carrillo, J. M. (2001). *Aplicaciones de la integral.* I.T.Telecomunicaciones: https://navarro.orgfree.com

Cedeño, M. (2020). Aula invertida una estrategia motivadora de enseñanza para estudiantes de educación general básica. *Dominio de la Ciencia*, 10.

Chapra, S. C., & Raymond , C. P. (2015). *Métodos númericos para ingenieros* . McGRAW-HILL/INTERAMERICANA EDITORES, S.A. DE C.V. https://doi.org/978-607-15-1294-9

Chipantiza Urquizo, J. R. (Junio de 2021). *Aplicación del aula invertida para mejorar el proceso enseñanza-aprendizaje de las matemáticas de los estudiantes del noveno año de EGB de Pelileo*. Repositorio PUCESA: https://repositorio.pucesa.edu.ec/handle/123456789/3224

Cuorant, R., & Fritz, J. (2017). *Introduccion al calculo y al analisis matematico.* Mexico: Limusa. S. A.

Del Rosario, E. (5 de 10 de 2017). *Métodos Númericos*. FCNM ESPOL: http://blog.espol.edu.ec/analisisnumerico/regla-del-trapecio/

Engler, A., Müller, D., Vrancken, S., & Hecklein, M. (2020). *El cálculo integral.* Ediciones UNL. https://doi.org/978-987-749-137-1

Figuero, B. (2016). The class plan, a professional genre: how beginning teachers narrate and legitimate it from the multimodality paradigm. *ATENEA*, 236.

Fúneme Mateus, C. C. (2019). El aula invertida y la construcción de conocimiento en matemáticas. *Redalyc.org, 45*, 159-174. https://doi.org/ISSN 0121- 3814

Gallego Henao, A., & Manrique Orozco, A. (2013). EL MATERIAL DIDÁCTICO PARA LA CONSTRUCCIÓN DE APRENDIZAJES. *Revista Colombiana de Ciencias Sociales, 4*(1), 12. https://doi.org/2216-1201

Garcia, A., Villatoro, T., & Palacios, E. (2021). *CÁLCULO INTEGRAL*. Chiapas: CENTRO COMERCIALIZADOR DE IMPRESOS DEL SUR.

Gil, E. (2005). *Departamento de Matem´atica Aplicada*. https://www.google.com/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=&ved=2ahUKEwjPkLr5tLj9AhUOTTABHagRCGk4FBAWegQICBAB&url=https%3A%2F%2Fwww.uned.es%2Funiversidad%2Finicio%2Fdam%2Fjcr%3A60511774-7f5b-4022-a5e0-babc7448aa17%2FTema4-Integrales-Teor%25C3%25ADa.pdf

González, M. (2020). El aula invertida: un desafío para la enseñanza universitaria. *UNC, 11*(20), 75-91. https://doi.org/1853-6530

GRANVlllE, W. A. (2009). *Cálculo diferencial e integral* . LlMUSA, S.A. https://doi.org/978-968-18-1178-5

Henao, A. M. (2012). MATERIAL DIDÁCTICO PARA LA CONSTRUCCIÓN DE APRENDIZAJE. *Revista Social de Colombia*, 14.

HERNÁNDEZ, D. (2013). Cálculo integral de funciones de una variable:. *Departamento de Análisis Matemático*, 1-15.

Hernández., B. (2015). *MATEMATICAS VI*. https://sites.google.com/site/matematicasviproyecto/calculo-integral

Larson, R., Hostetler, R., & Edwards, B. (2006). *Cálcula con geometría analítica.* McGraw-Hill Interamericana. https://doi.org/0-618-50298-X

Llorens Fuster, J. L., & Prat Villar, M. (2015). Extensión del Modelo de Van Hiele al concepto de área. *Revista Virtual Universidad Católica del, 45*, 113-128. https://doi.org/ISSN: 0124-5821

Manzana, A. (2017). EL MODELO FLIPPED CLASSROOM. *INFAD - Revista de Psicopedagogia* , 5.

Martínez, W. (2015). Aula invertida o Modelo invertido. *Research Gate*, 143-160.

Medkov, K. (1977). *Cálculo diferencial e integral Tomo I.* Mir Moscú. https://doi.org/978-5030006932

Mena Ponciano, I. (22 de Agosto de 2018). *PROYECTOS MULTIMEDIA EDUCATIVOS Y ETAPAS PARA SU DESARROLLO*. https://doi.org/ISSN: 1989-4155

Merla, A., & Yáñez , C. (2016). El aula invertida como estrategia para la mejora del rendimeinto académico . *Bachillerato a distancia*, 76.

Morales Ramos, L., & Guzmán Flores, T. (2015). EL VÍDEO COMO RECURSO DIDÁCTICO PARA REFORZAR EL. *Memorias del Encuentro Internacional de Educación a Distancia, 3*(6), 10. https://doi.org/2395-8901

Muñoz, M. V. (2009). *Dspace Spol* . https://www.google.com/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=&ved=2ahUKEwjOxuibvLj9AhXtQjABHWGiBUQ4ChAWegQIIhAB&url=https%3A%2F%2Fwww.dspace.espol.edu.ec%2Fbitstream%2F123456789%2F4800%2F3%2F7416.pdf&usg=AOvVaw3ItH4I22uPwKjm_3t9dq1b

Murillo, G. V. (2017). Recursos educativos didácticos en el proceso enseñanza aprendizaje. *Temas para la enseñanza, 58*(1), 7. https://doi.org/ISSN 1562-6776

Prezi Inc. (2015). *CENTRO DE MASA DE UNA BARRA*. Prezi : https://prezi.com/rpfbbfihuq6n/centro-de-masa-de-una-barra/

Purcell, E. J., Varberg, D., & Rigdon, S. (2007). *Cálculo diferencial e Integral.* Mexico: PEARSON EDUCACIÓN. https://doi.org/978-970-26-0989-6

Ramón, J. (2020). Clase invertida: implicancias en el desarrollo de competencias matemáticas en educación secundaria. *Scielo*, 6.

Ramos, M. D. (NOVIEMBRE de 2017). *UNIVERSIDAD RAFAEL LANDÍVAR*. https://www.google.com/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=&ved=2ahUKEwi

qvPiak9iBAxXUnYkEHYugDdIQFnoECAkQAw&url=http%3A%2F%2Frecursosbiblio.url.edu.gt%2Ftesiseortiz%2F2018%2F05%2F86%2FCasimiro-Maria.pdf&usg=AOvVaw2rjkbLFmPr_uulHswk6t2a&opi=89978449

Rivera, F. (2019). *ABYA YALA - Aula Invertida*. https://www.google.com/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=&cad=rja&uact=8&ved=2ahUKEwiOpKXRhrn9AhWmSzABHa9qC54QFnoECBMQAQ&url=https%3A%2F%2Fdspace.ups.edu.ec%2Fhandle%2F123456789%2F19036%3Fmode%3Dfull&usg=AOvVaw32013_IQnpv5n8eoyD0hfr

Rodríguez, F. A. (2018). *CÁLCULO INTEGRAL*. Editorial Universitaria Abya-Yala. https://doi.org/978-9978-10-295-4

Rodríguez, R. (2018). Los modelos de aprendizaje de Kolb, Honey y Mumford: implicaciones para la educación en ciencias. *SOFIA-SOPHIA*, 52-64.

Rossini, G., & Alonso, A. (2015). *Análisis Matemático I – CIBEX*. Universidad Nacional de La Plata.

Saphier, J., Haley-Speca, M. A., & Gower, R. (2007). *The Skillful Teacher: Building Your Teaching Skills.* Research for Better Teaching.

Stewart, J. (2012). *C Á L C U L O DE UNA VARIABLE* . Cengage Learning Editores, S.A. de C.V. https://doi.org/978-0-538-49867-8

Strang, G., & Herman , E. (24 de Marzo de 2022). *Integración numérica*. OpenStax: https://openstax.org/books/c%C3%A1lculo-volumen-2/pages/1-introduccion

Swertlow, M., & Loftus, K. (S.f de S.f de 2023). *Introducción a los guiones de vídeos.* Adobe: https://www.adobe.com/es/creativecloud/video/discover/video-script.html

Taipe, M. D. (2020). Metodologías activas en el proceso enseñanza - aprendizaje. *ROCA*, 472.

Uicab, G. (2009). Materiales Tamgibles: Su influencia en el proceso de enseñanza y aprendizaje. *CLAME, 2*, 1007-1013. https://doi.org/5119

Vigueras, J. (2020). Aula invertida una estrategia motivadora de ensenanza para estudaintes de educacion general Basica. *Dominio de las ciencias*, 9.

Zhang, B. (2003). Using student–centered teaching strategies in calculus. En B. Zhang, *Tertiary science and mathematics teaching for the 21st century 2.* (págs. 100-103).

ANEXOS

Anexo 1: Instrumento de recolección de datos.

FICHA DE OBSERVACION

Contenidos que tienen relación con el tema de integrales definida:

Tabla 1
Criterio de selección unidad temática.

CRITERIOS DE SELECCIÓN		
Unidad Temática	Si	No
Integral indefinida		
Integral definida	x	
Integrales impropias		
Se utilizará la unidad temática de integrales definidas.		

Nota: Selección de la unidad temática referente a integrales definidas

Temas que contiene la unidad temática de intégrales definidas.

Tabla 2
Criterios selección temas de integral definida.

CRITERIOS DE SELECCIÓN		
Integral Definida	Si	No
Sumatorias	x	
Integral indefinida	x	
Cálculo de áreas 1	x	
Cálculo de áreas 2	x	
Integral aproximada	x	
Aplicaciones de la integral	x	
Se seleccionaron los temas que tengas relación con integrales definidas.		

Nota: Selección de temas que guardan relación con integrales definidas.

Plan de clases.

Anexo 2: Plan de clases integral definida.

PLAN DE CLASES

AULA INVERTIDA

ASIGNATURA: Cálculo Integral

CURSO: Quinto semestre

UNIDAD TEMATICA: Integral definida

Fecha de inicio:	Fecha de término:

Fecha establecida por el docente a su disposición.

Objetivo de la unidad:

Los estudiantes deberán comprender a profundidad el concepto, las propiedades y las aplicaciones de la integral definida en cálculo, así como ser capaces de aplicarla en el cálculo preciso de áreas bajo curvas y cantidades acumuladas.

TEMA:

Integral Definida

Clase	
Objetivo	Reconocer y aplicar correctamente la notación de la integral definida y comprender el significado de los símbolos utilizados en su representación.
Desarrollo	**Inicio:** **Motivación:** Duración: 5-6 min Ayuda a los estudiantes a establecer metas realistas y alcanzables para la clase. Destaca cómo la comprensión de la integral definida será útil en futuras clases de cálculo, así como en disciplinas relacionadas, como física, economía, estadísticas, etc.

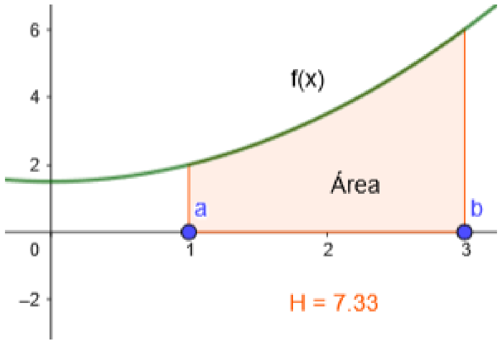
	Desarrollo: **Experiencia:** Duración: 10-15 min Análisis de conocimientos previos: Comienza la clase explicando el concepto de integral definida y su relación con el cálculo de áreas bajo curvas. Proporciona ejemplos simples para ilustrar cómo funciona. **Reflexión:** Duración: 10-15 min Comparación con conceptos previos**:** Pide a los estudiantes que comparen la integral definida con otros conceptos previamente aprendidos, como la integral indefinida o la derivada. Esto les ayudará a identificar similitudes, diferencias y a profundizar su comprensión. Antes de introducir a los estudiantes al concepto de integrales definidas, es importante revisar y afianzar algunos conocimientos previos que les ayudarán a comprender mejor este nuevo concepto. - Funciones y Gráfico. Las funciones se pueden representar de diversas maneras, y una de las representaciones más comunes es a través de gráficos. Un gráfico de una función muestra cómo los valores de entrada se relacionan con los valores de salida en un sistema de coordenadas. Por lo general, en un gráfico, el eje horizontal (el eje de las x) representa los valores de entrada, y el eje vertical (el eje de las y) representa los valores de salida. - Álgebra y Manipulación de Expresiones El álgebra es una herramienta fundamental en las matemáticas y se utiliza en una amplia gama de aplicaciones, desde la resolución de problemas matemáticos hasta la modelización de situaciones del mundo real. La manipulación de expresiones algebraicas y la resolución de ecuaciones son habilidades esenciales en esta disciplina.

	- Derivadas y Cálculo Diferencia El cálculo diferencial es una herramienta fundamental en las matemáticas y la ciencia, ya que permite comprender cómo las variables cambian en relación con otras variables. Las derivadas son esenciales para resolver problemas de optimización, modelado y análisis de sistemas dinámicos, entre otros - Sumas y Notación Sigma La notación sigma es una herramienta poderosa en matemáticas, utilizada en cálculo, álgebra y muchas otras áreas, para simplificar la representación de sumas de términos en secuencias numéricas o en funciones. - Límites El concepto de límites es esencial para comprender el cálculo diferencial y el cálculo integral, ya que los límites se utilizan para definir derivadas e integrales. También son fundamentales en la comprensión de cómo se comportan las funciones en puntos específicos y en la resolución de problemas matemáticos y científicos. - Áreas y Geometría El cálculo de áreas es esencial en diversas aplicaciones, desde la construcción y la arquitectura hasta la física y la ingeniería. Comprender los conceptos geométricos y saber cómo calcular áreas es fundamental en la resolución de problemas prácticos y teóricos en geometría y matemáticas en general. - Notación Matemática La notación matemática es esencial para la comunicación eficiente y precisa en matemáticas y disciplinas relacionadas. Permite a los matemáticos y científicos expresar ideas, fórmulas y relaciones de manera concisa y unificada, lo que facilita la comprensión y el intercambio de conocimientos matemáticos. **Conceptualización:** Duración: 30-35 min - Definición de integral definida. Formalmente, la integral definida de una función $f(x)$ desde a hasta b se denota como:

$$Área = \int_a^b f(x)dx$$

Donde a y b son los límites de integración, $f(x)$ es la función que se está integrando y dx indica la variable de integración (generalmente x en este caso).

La interpretación geométrica de la integral definida es el área bajo la curva de la función $f(x)$ entre $x = a$ y $x = b$ en el plano cartesiano.



- Linealidad de integral definida

Si $f(x)$ y $g(x)$son funciones integrables en el intervalo $[a, b]$ y c es una constante, entonces se cumple la siguiente propiedad de linealidad:

Suma de funciones:

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

La integral de la suma de dos funciones es igual a la suma de las integrales de las funciones individuales.

Multiplicación por una constante:

$$\int_a^b c * f(x)dx = c * \int_a^b f(x)dx$$

La integral de una constante multiplicada por una función es igual a la constante multiplicada por la integral de la función.

Propiedad del valor promedio:

Si $f(x)$ es continua en el intervalo $[a, b]$ y entonces el valor promedio de $f(x)$ en este intervalo es:

$$V_m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Inversión de límites:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

Aditividad de los intervalos de integración:

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

- Área bajo una curva

El cálculo del área bajo una curva es una aplicación importante del cálculo integral y se utiliza en una variedad de campos, como física, economía, estadísticas y más. Las integrales definidas son la herramienta principal para calcular estas áreas de manera precisa.

- Teorema fundamental del cálculo

Teorema fundamental del cálculo:

Si $F(x)$ es una función continua en el intervalo $[a,b]$ y $F'(x) = f(x)$ para todo x en (a,b).

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Esta parte del teorema proporciona un método para evaluar la integral definida utilizando antiderivadas.

- Ejemplos de aplicación
- Conclusiones y aplicaciones en la vida real

El cálculo del área bajo una curva utilizando integrales es una herramienta poderosa que se utiliza en una amplia variedad de campos y aplicaciones en la vida real. Permite cuantificar y analizar áreas, volúmenes, tasas de cambio y optimización, lo que resulta fundamental en la toma de decisiones, el diseño de sistemas y la resolución de problemas en numerosas disciplinas.

Resolución ejercicios:

La función es $x^2 + 3x$ con los siguientes límites de

	integración a y b. $$\int_0^2 (x^2+3x)dx$$ Aplico la regla de la suma $$\int_0^2 (x^2+3x)dx = \int_0^2 x^2 dx + \int_0^2 3x\,dx$$ Resuelvo cada integral por separado $$\int_0^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3}$$ $$\int_0^2 3x\,dx = \frac{3}{2}x^2$$ Una vez que resolvimos por separado podemos reescribir de la siguiente manera. $$\int_0^2 (x^2+3x)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2\right] \Big|_0^2$$ Aplicar teorema fundamental del calculo $$\int_0^2 (x^2+3x)dx = F(2) - F(0)$$ Evaluamos en la función el límite superior para realizar una diferencia con la función evaluada con el límite inferior. Evaluar los límites de integración $$\int_0^2 (x^2+3x)dx = \left(\frac{1}{3}(2)^3 + \frac{3}{2}(2)^2\right) - \left(\frac{1}{3}(0)^3 + \frac{3}{2}(0)^2\right)$$ $$\int_0^2 (x^2+3x)dx = \left(\frac{1}{3}(8) + \frac{3}{2}(4)\right) - \left(\frac{1}{3}(0) + \frac{3}{2}(0)\right)$$ **Resta** $F(b)$ y $F(a)$ para obtener el resultado de la integral definida: $$\int_0^2 (x^2+3x)dx = \left(\frac{8}{3} + 6\right) - (0+0)$$ $$\int_0^2 (x^2+3x)dx = \left(\frac{8}{3} + 6\right)$$ $$\int_0^2 (x^2+3x)dx = \frac{26}{3}$$ **Obtener el resultado final.** $$\int_0^2 (x^2+3x)dx \approx 8.66667\ u^2$$

	$$A \approx 8.66667\ u^2$$ **Cierre:** **Aplicación – Evaluación:** Duración: 15-20 min - Resolver los siguientes ejercicios planteados en el aula de clases Calcular la Integral Definida $$\int_{-3}^{7}\left(\frac{x^3+2\,x}{4}\right)dx$$ Resolución del ejercicio planteado. Aplico la regla de la suma $$\int_{-3}^{7}\left(\frac{x^3+2\,x}{4}\right)dx = \int_{-3}^{7}\frac{x^3}{4}\ dx + \int_{-3}^{7}\frac{2x}{4}\ dx$$ Resolvemos cada integral por separado $$\int_{-3}^{7}\frac{x^3}{4}\ dx = \frac{x^{3+1}}{4(3+1)}$$ $$\int_{-3}^{7}\frac{x^3}{4}\ dx = \frac{x^4}{16}$$ Una vez que resolvimos por separado podemos reescribir de la siguiente manera. $$\int_{-3}^{7}\left(\frac{x^3+2\,x}{4}\right)dx = \left[\frac{x^4}{16}+\frac{x^2}{4}\right]\Big\|_{-3}^{7}$$ Aplicar teorema fundamental del calculo $$\int_{-3}^{7}\left(\frac{x^3+2\,x}{4}\right)dx = F(7)-F(-3)$$ $$\int_{-3}^{7}\left(\frac{x^3+2\,x}{4}\right)dx = \left[\frac{(7)^4}{16}+\frac{(7)^2}{4}\right]-\left[\frac{(-3)^4}{16}+\frac{(-3)^2}{4}\right]$$ $$\int_{-3}^{7}\left(\frac{x^3+2\,x}{4}\right)dx = \left[\frac{2401}{16}+\frac{49}{4}\right]-\left[\frac{81}{16}+\frac{9}{4}\right]$$ $$\int_{-3}^{7}\left(\frac{x^3+2\,x}{4}\right)dx = \left[\frac{2597}{16}\right]-\left[\frac{117}{16}\right]$$ $$\int_{-3}^{7}\left(\frac{x^3+2\,x}{4}\right)dx = 155$$

	$$A \approx 155\ u^2$$ Calcular la Integral Definida $$\int_{-1}^{0}(x^3 + 5x)dx$$ Resolución del ejercicio planteado. Aplico la regla de la suma $$\int_{-1}^{0}(x^3 + 5x)dx = \int_{-1}^{0}x^3dx + \int_{-1}^{0}5x\ dx$$ Resolvemos cada integral por separado $$\int_{-1}^{0}x^3dx = \frac{x^4}{4}$$ $$\int_{-1}^{0}5x\ dx = \frac{5x^2}{2}$$ Una vez que resolvimos por separado podemos reescribir de la siguiente manera. $$\int_{-1}^{0}(x^3 + 5x)dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{5x^2}{2}\right]\Big\vert_{-1}^{0}$$ Aplicar teorema fundamental del calculo $$\int_{-1}^{0}(x^3 + 5x)dx = \lvert F(0) - F(-1)\rvert$$ $$\int_{-1}^{0}(x^3 + 5x)dx = \left\lvert\left[\frac{(0)^4}{4} + \frac{5(0)^2}{2}\right] - \left[\frac{(-1)^4}{4} + \frac{5(-1)^2}{2}\right]\right\rvert$$ $$\int_{-1}^{0}(x^3 + 5x)dx = \left\lvert\left[\frac{0}{4} + \frac{0}{2}\right] - \left[\frac{1}{4} + \frac{5}{2}\right]\right\rvert$$ $$\int_{-1}^{0}(x^3 + 5x)dx = \left\lvert-\frac{11}{4}\right\rvert$$ $$\int_{-1}^{0}(x^3 + 5x)dx = 2.75$$ $$A \approx 2.75\ u^2$$ Calcular la siguiente integral definida: $$\int_{3}^{6}6x^2\ dx$$ - Anima a los estudiantes a hacer preguntas, proponer ejemplos y discutir cómo pueden aplicar este concepto en otras situaciones.

ACTIVIDADES QUE CONSIDERAR EN EL AULA DE CLASES

Recomendación para aplicación:

Estas preguntas y actividades ayudarán a los estudiantes a comprender mejor las sumas inferiores y superiores en el contexto del cálculo y cómo se relacionan con el cálculo de integrales.

Actividades:

Preguntas Conceptuales:

- ¿Qué es una integral definida y cuál es su significado geométrico?

  La interpretación geométrica de la integral definida como el área bajo una curva es fundamental para comprender su aplicación en la resolución de problemas en el mundo real.

- ¿Cómo se calcula la integral definida de una función en un intervalo dado?

  Escribe la integral definida
  Encuentra la antiderivada de la función
  Evalúa la antiderivada en los límites del intervalo
  Sustituye los límites en la resta
  Escribe el resultado final

- ¿Cuál es la relación entre la integral definida y el área bajo una curva?

  Esta relación es fundamental en el cálculo integral y se basa en el principio de acumulación y el teorema fundamental del cálculo. La integral definida se utiliza para cuantificar y calcular áreas, volúmenes, longitudes de arcos y otros conceptos relacionados con la acumulación en contextos continuos

Ejemplos Prácticos:

- Proporciona una función y pide a los estudiantes que calculen la integral definida en un intervalo específico y luego interpreten su significado en términos de área bajo la curva.
- Dibuja una función en un plano cartesiano y pide a los estudiantes que calculen el área bajo la curva utilizando la integral definida.

Actividades de Grupos Pequeños:

- Divide a los estudiantes en grupos y asigna a cada grupo una función para calcular su integral definida en un intervalo determinado. Luego, que compartan sus resultados y discutan las diferencias y similitudes.
- Pide a los estudiantes que trabajen en parejas para encontrar aplicaciones del cálculo de la integral definida en situaciones cotidianas o en campos específicos, como física, economía o biología.

Visualización:

- Utiliza software o herramientas en línea para mostrar gráficamente cómo la integral definida representa el área bajo una curva.

- Anima la representación gráfica de la integral definida mientras cambias el intervalo de integración y la función, para ayudar a los estudiantes a visualizar cómo afecta a la "área" bajo la curva.

Debates y Discusiones

- Organiza un debate sobre la importancia y aplicaciones de la integral definida en diferentes campos académicos o profesionales.

- Fomenta una discusión sobre las ventajas y desventajas de utilizar diferentes métodos para calcular la integral definida, como el teorema fundamental del cálculo o las sumas de Riemann.

Repositorio de planes de clases:

Enlace: https://drive.google.com/drive/folders/1YwHienFxlEUxkL1FXuSvCD4u-gbq1aJc?usp=drive_link

Material desarrollado.

Anexo 3:

Temas de cálculo integral unidad temática integrales definidas materia y ejercicios.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CHIMBORAZO

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACION HUMANAS Y TECNOLOGIAS

PEDAGOGÍA DE LAS CIENCIAS EXPERIMENTALES:

MATEMÁTICAS Y LA FÍSICA

AUTOR:

ELVIS GUSTAVO GUAIRACAJA RAMIREZ

ASIGNATURA:

CÁLCULO INTEGRAL

TEMA:

INTEGRAL DEFINIDA

INTEGRAL DEFINIDA

La integral definida tiene límites de integración, lo que significa que se calcula la integral de una función entre dos puntos específicos en el dominio de la función.

Importancia de estudiar integrales definidas:

En el campo de la educación el aprender matemáticas es muy importante que permitan el desarrollo de las habilidades.

> Según Rodríguez (2018), el cálculo integral es una herramienta poderosa y versátil que se utiliza en una gama amplia de campos para resolver problemas complejos y analizar datos. Su importancia en su capacidad para proporcionar una comprensión profunda de procesos y fenómenos, así como en su aplicación práctica en diversas áreas de la ciencia y la ingeniería (Rodríguez, CÁLCULO INTEGRAL, 2018).

Definición:

Según Cuorant & Fritz (2017) en su libro nos mencionan formalmente que la integral definida de una función $f(x)$ desde a hasta b se denota como (p. 15).

$$\lambda\big(G(f,a,b)\big) = \int_a^b f(x)dx$$

Donde a y b son los límites de integración, $f(x)$ es la función que se está integrando y dx indica la variable de integración (generalmente x en este caso).

La interpretación geométrica de la integral definida es el área bajo la curva de la función $f(x)$ entre $x = a$ y $x = b$ en el plano cartesiano (HERNÁNDEZ, 2013).

Teorema de integrabilidad:

Si f es acotada en $[a, b]$ y si f es continua, excepto el número finito entonces f es integrable en $[a. b]$. En particular, si f es continua en todo el intervalo $[a, b]$, es integrable en$[a, b]$ $(\text{Purcell et al.}, 2007, \text{p.} 227)$**.**

Linealidad de la integral definida:

Si $f(x)$ y $g(x)$son funciones integrables en el intervalo $[a,b]$ y c es una constante, entonces se cumple la siguiente propiedad de linealidad.

Suma de funciones:

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

La integral de la suma de dos funciones es igual a la suma de las integrales de las funciones individuales.

Multiplicación por una constante:

$$\int_a^b c * f(x)dx = c * \int_a^b f(x)dx$$

La integral de una constante multiplicada por una función es igual a la constante multiplicada por la integral de la función.

Teorema fundamental del cálculo:

Si $F(x)$ es una función continua en el intervalo $[a, b]$ y $F'(x) = f(x)$ para todo x en (a, b) (Rossini y Alonso, 2015).

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \; es \; deribable$$

Esta parte del teorema proporciona un método para evaluar la integral definida utilizando antiderivadas.

Propiedad del valor promedio:

Según Garcia, Villatoro, & Palacios (2021), Si $f(x)$ es continua en el intervalo $[a, b]$ y entonces el valor promedio de $f(x)$ en este intervalo es (Garcia et al., 2021).

$$V_m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Inversión de límites:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

Aditividad de los intervalos de integración:

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_b^a f(x)dx$$

Regla de Barrow

Si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$ y $F(x)$ es una primitiva entonces:

$$\int_b^a f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

$F(x)|_a^b$ es una formade escribir $F(b) - F(a)$

No es necesario que la función $f(x)$ sea positiva ya que el resultado es válido para cualquier función continua $f(x)$.Al aplicar la regla de Barrow hay que prestar atención a los límites de integración si se aplican algunos métodos de integración que ocasionan cambios en el integrando (Bragulat, 2000).

Cálculo de una integral definida.

Nos menciona GRANVlllE (2009) en su libro que el procedimiento se resume a lo siguiente:

Paso 1: Integral la expresión diferencial dada.

Paso 2: Remplazar la variable en esta integral indefinida en primer lugar por el límite superior, después por el limite inferior, y restar el segundo resultado del primero.

No es necesario tener en cuenta la constante de integración, puesto que desaparece en la sustracción (p. 289).

Ejercicios:

Resolución de ejercicios:

Calcular la Integral Definida

$$\int_0^2 (x^2 + 3x)dx$$

Solución:

Vamos a seguir los pasos para calcular esta integral definida.

1. **Comprender el problema:**
   Cuando se nos presenta un ejercicio de integrales definidas entendemos que implica calcular el área bajo una curva en un intervalo específico del eje x utilizando el concepto de integral definida.
2. **Diseñar un plan.**
   - ***Identificar la función y los límites de integración***
     Identifica la función $f(x)$ que se proporciona y anota los límites de integración a y b. Estos serán los extremos del intervalo en el que se calculará la integral definida.
   - ***Calcular la integral indefinida***
     Calcula la integral indefinida de la función $f(x)$ utilizando el teorema fundamental del cálculo.
   - ***Evaluar en los límites de integración***
     Sustituye los límites de integración a y b en la expresión obtenida en el paso anterior para obtener dos valores: $F(b)$ y $F(a)$, donde $F(x)$ es la antiderivada de $f(x)$.
   - ***Restar y obtener el resultado***
     Resta $F(b)$ y $F(a)$ para obtener el resultado de la integral definida:
     $$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$
   - ***Calcular el área***
     Obtener el resultado final.
3. **Ejecutar el plan.**

   La función es $x^2 + 3x$ con los siguientes límites de integración a y b.
   $$\int_0^2 (x^2 + 3x)dx$$
   Aplico la regla de la suma
   $$\int_0^2 (x^2 + 3x)dx = \int_0^2 x^2dx + \int_0^2 3x\,dx$$
   Resuelvo cada integral por separado
   $$\int_0^2 x^2dx = \frac{x^3}{3}$$

$$\int_0^2 3x\,dx = \frac{3}{2}x^2$$

Una vez que resolvimos por separado podemos reescribir de la siguiente manera.

$$\int_0^2 (x^2+3x)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2\right]|_0^2$$

Aplicar teorema fundamental del calculo

$$\int_0^2 (x^2+3x)dx = F(2) - F(0)$$

Evaluamos en la función el límite superior para realizar una diferencia con la función evaluada con el límite inferior.

Evaluar los límites de integración

$$\int_0^2 (x^2+3x)dx = \left(\frac{1}{3}(2)^3 + \frac{3}{2}(2)^2\right) - \left(\frac{1}{3}(0)^3 + \frac{3}{2}(0)^2\right)$$

$$\int_0^2 (x^2+3x)dx = \left(\frac{1}{3}(8) + \frac{3}{2}(4)\right) - \left(\frac{1}{3}(0) + \frac{3}{2}(0)\right)$$

Resta $F(b)$ y $F(a)$ para obtener el resultado de la integral definida:

$$\int_0^2 (x^2+3x)dx = \left(\frac{8}{3} + 6\right) - (0+0)$$

$$\int_0^2 (x^2+3x)dx = \left(\frac{8}{3} + 6\right)$$

$$\int_0^2 (x^2+3x)dx = \frac{26}{3}$$

Obtener el resultado final.

$$\int_0^2 (x^2+3x)dx \approx 8.66667\ u^2$$

$$A \approx 8.66667\, u^2$$

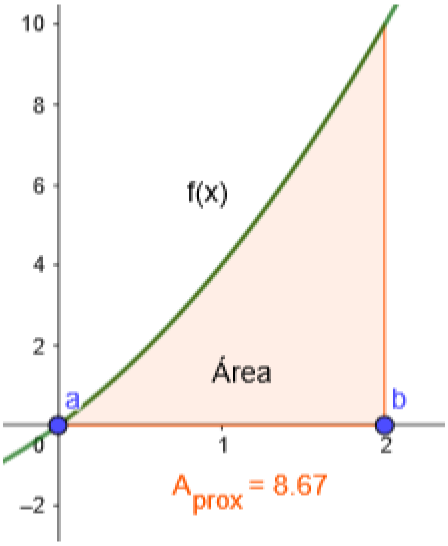
4. **Verificar el resultado.**

Para comprobar el resultado final se puede utilizar una aplicación que permita graficar y calcular el área de la función.

Ejercicio:

$$\int_0^2 (x^2+3x)dx$$

Grafica:



Tanto como el resultado calculado paso a paso o el que se insertó en la aplicación nos reportan resultados similares.

Repositorio de recursos:

Enlace:https://drive.google.com/drive/folders/1Imem07mMJKeymEDy7ESXP5u8yu4pWMLv?usp=drive_link

Guiones de video desarrollados.

Anexo 4:

Guiones de video recopilados por temas.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CHIMBORAZO

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACION HUMANAS Y TECNOLOGIAS

PEDAGOGÍA DE LAS CIENCIAS EXPERIMENTALES:

MATEMÁTICAS Y LA FÍSICA

AUTOR:

ELVIS GUSTAVO GUAIRACAJA RAMIREZ

ASIGNATURA:

CÁLCULO INTEGRAL

TEMA:

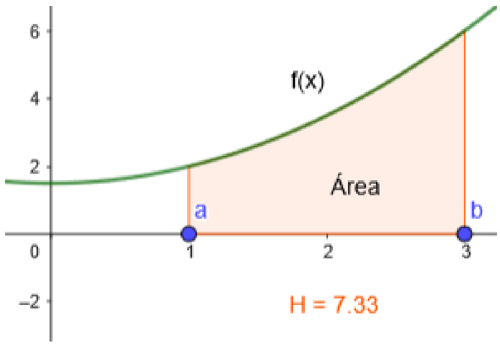
GUION VIDEO INTEGRAL DEFINIDA

PERIODO:

2023-2024

Planificar y Diseñar: Integral definida

Guion de video			
IMAGEN	AUDIO		TIEMPO
	SONIDO	TEXTO	
Titulo: Caratula de la presentación realizada en Power point.	Narrador: Elvis Guairacaja	**CARATULA:** Saludo inicial a los estudiantes a quienes va dirigido el video.	30 s
Titulo: Caratula de la presentación realizada en Power point.	Narrador: Elvis Guairacaja	**CARATULA:** **UNIVERSIDAD NACIONAL DE CHIMBORAZO** **PEDAGOGÍA DE LAS CIENCIAS EXPERIMENTALES MATEMÁTICAS Y FÍSICA** Por: Elvis Guairacaja CALCULO INTEGRAL Curso: Quinto semestre	30 s
Titulo: Página de motivación en la presentación power point.	Narrador: Elvis Guairacaja	**PAGINA 1:** Ayuda a los estudiantes a establecer metas realistas y alcanzables para la clase. Destaca cómo la comprensión de la integral definida será útil en futuras clases de cálculo, así como en disciplinas relacionadas, como física, economía, estadísticas, etc.	2 min
Titulo: Página de experiencia en la presentación.	Elvis Guairacaja	P**AGINA 1:** Análisis de conocimientos previos: Proporciona ejemplos simples para ilustrar cómo funciona el cálculo de áreas bajo una región	1 min

		sombreada.	
Titulo: Página de reflexión en la presentación.	Elvis Guairacaja	**PAGINA 1:** Realizar preguntas que les permita analizar el tema de integrales: ¿Han descubierto nuevas aplicaciones o han ampliado su comprensión?	1 min
Titulo: Conceptualización Integral Definida	Elvis Guairacaja	**PAGINA 2:** **INTEGRAL DEFINIDA** **Definición:** Formalmente, la integral definida de una función $f(x)$ desde a hasta b se denota como: $$Area = \int_a^b f(x)dx$$ La interpretación geométrica de la integral definida es el área bajo la curva de la función $f(x)$ entre $x = a$ y $x = b$ en el plano cartesiano.  	3 min
Titulo: Conceptualización Propiedades de linealidad	Elvis Guairacaja	**PAGINA 3:** **PROPIEDADES DE LINEALIDAD** **Se relata los siguientes elementos presentes en la página.** **Suma de funciones:** $$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$	3 min

		La integral de la suma de dos funciones es igual a la suma de las integrales de las funciones individuales. **Multiplicación por una constante:** $\int_a^b c * f(x)dx = c * \int_a^b f(x)dx$ La integral de una constante multiplicada por una función es igual a la constante multiplicada por la integral de la función. **Inversión de límites:** $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ **Aditividad de los intervalos de integración:** $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$	
Titulo: Conceptualización Teorema fundamental del cálculo.	Elvis Guairacaja	**PAGINA 4:** **Se relata los siguientes elementos presentes en la página.** **Teorema fundamental del cálculo:** Si $F(x)$ es una función continua en el intervalo $[a, b]$ y $F'(x) = f(x)$ para todo x en (a, b). $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ El Teorema Fundamental del Cálculo es esencial en cálculo integral porque proporciona un método poderoso para calcular integrales definidas y permite la conexión entre el cálculo de áreas bajo curvas y la manipulación algebraica de funciones.	3 min
Titulo: Aplicación.	Elvis Guairacaja	**PAGINA 5-6:** **Se relata los siguientes elementos**	5 min

Resolución de ejercicio		**presentes en la página.** Calcular la siguiente integral definida: $$\int_0^2 (x^2 + 3x)dx$$ Se relatará como se resuelve a pasos la siguiente integral planteada	
Titulo: Aplicación. Comprobación de resultado	Elvis Guairacaja	**PAGINA 7:** Para comprobar el resultado final se puede utilizar una aplicación que permita graficar y calcular el área de la función. Ejercicio: $$\int_0^2 (x^2 + 3x)dx$$	1 min
Titulo: Aplicación. Proponer un ejercicio.	Elvis Guairacaja	**PAGINA 8:** **Ejercicio propuesto:** Calcular la siguiente integral definida: $$\int_3^6 6x^2\, dx$$	30 s
Titulo: Referencia.	Elvis Guairacaja	**PAGINA 9:** Se mencionarán, ilustraran libros que se utilizaron para revisión literaria.	30 s

DURACION DEL VIDEO	Se ocupará aproximadamente 22 min para desarrollar las actividades.
RECURSO MULTIMEDIA	Se utilizarán plataformas de presentación como Power Poin, Zoom.

Repositorio de recursos:

Enlace: https://drive.google.com/drive/folders/19ukn-SsveWFTfoe69XIFwppiPvCUD8A5?usp=drive_link

Videos generados.

Anexo 5:

Recopilación de videos.

Video tema: Integrales definida.

Enlace:

https://youtu.be/gJ_GssLNvx4?si=x_BLjXoLabZHJTz3

Video tema: Calculo de áreas 1

Enlace:

https://youtu.be/V-tgWYJvcNA

Video tema: Calculo áreas 2

Enlace:

https://youtu.be/ArafLgfLC3o

Video tema: Integral aproximada.

Enlace:

https://youtu.be/gJ_GssLNvx4?si=0WVKhb5uFMLPvTfs

Video tema: Aplicación de la integral definida

Enlace:

https://youtu.be/d-UNvKjf7ck?si=Wh5GBjw6-0xNafXL